INSTITUTIONES PHILOSOPHICÆ AD STUDIA THEOLOGICA POTISSIMUM...

François Jacquier



INSTITUTIONES PHILOSOPHICÆ AD STUDIA THEOLOGICA POTISSIMUM ACCOMMODATÆ,

AUCTORE

FRANCISCO JACQUIER

EX MINIMORUM FAMILIA PRIMARIARUM PER EUROPAM ACADEMIARUM SOCIO,

IN LYCEO ROMANO, ET IN COLLEGIO URBANO DE PROPAGANDA FIDE PROFESSORE.

TOMUS TERTIUS

Quo Elementa Arithmeticæ, Algebræ, & Geometriæ continentur.



VENETIIS MDCCLXII.

SIMONIS OCCHI CURIS,

Superiorum permissu, ac Privilegio.

AUCTOR LECTORI.

PHysicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, ut apud omnes cultiores viros tamquam vanissimum merito habeatur Physices studium, Geometriæ præsidio destitutum. Quæ cum ita sint, nemo mirari debet quod a studiosis adolescentibus, sacræ licet Theologiæ destinatis, Arithmeticæ & Geometriæ Elementa requiram; si enim his careant doctrinæ Physicæ adjumentis, satius est eos huic præclarissimo studio valedicere omnino; *melius est nihil scire quam male scire*; tale enim cognitionis, potius dicam, ignorantiæ genus mentis aciem hebetat rectumque judicium corrumpit, & omni studiorum generi nocet plurimum. At me fortasse reprehendent censores aliqui quod nova elementa ediderim, cum nihil fere in orbe litterario frequentius sit Elementorum libris. Neque talem me esse quis sibi falso persuadeat, ut de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen a plerisque Elementorum Auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis Elementis ratione licet & methodo diversissimis suam justam laudem concedendam esse facile quisque fatebitur, si varias attenderit adolescentum conditiones atque voluntates. Alii sublimiorem Physicam Mathesimque universam addiscere, & funditus haurire sibi proponunt; alii autem aliis studiis gravioribusque negotiis nati institutiones Geometricas strictim leviterque tantum arripiunt, quantum scilicet expoliendo perficiendoque ingenio sa-

tis eſt. Alii ultra Geometriam quam *practicam* vocant, nolunt progredi; illaque minus nobili Geometriæ parte contenti ſunt; alii tandem alios fines aliaque conſilia in animo habent. Quid ergo mirum quod ego Arithmeticæ & Geometriæ Elementa ad meas Phyſicas inſtitutiones accommodatiſſima proponam? At quæcumque ſit Elementorum ratio, demonſtrationis ſeveritas religioſe ſemper tenenda eſt, neque obſcura multarum propoſitionum farragine juvenum mens eſt obruenda, ſed ſplendidiori accuratioris Geometriæ lumine illuſtranda. Monendi ergo ſunt ſtudioſi adoleſcentes ut ab iis caute abſtineant Elementis quæ nec ſatis accurata methodo conſcripta ſunt nec firmiſſimo demonſtrationum robore munita. Pernicioſiſſima quidem ſunt ſtudioſæ juventuti talia Elementa quæ eos habent Auctores quorum doctrina tota in Elementis continetur. Verum ſi recto proportionum ordine nexuque neceſſario colligatæ fuerint demonſtrationes omnes, ex hoc ſtudio diligenter, &, ut par eſt, inſtituto, in quolibet ſcientiarum genere fructum maximum ſine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam exiſtimationis Geometrico ſtudio detrahi debet, ſi aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam verſatiſſimi, in vulgari tamen agendi ratione & in rebus quoque familiariſſimis omnino inepti. Id quidem, quod ſumma injuria objici ſolet, tribuendum eſt præcipiti quorumdam Geometrarum judicio; non deſunt, fateor, celeberrimi etiam viri qui in rebus Mathematicis toti occupati, neceſſaria rerum tractandarum vel gerendarum principia & Elementa non ſatis tenent, atque hinc mirum non eſt quod aliquando errent graviter, Geometrarum

non

non Geometriæ vitio . Et requidem ipsa , si fons erroris probe attendatur , vitium in principiis , non vero in *consequentiis* latere deprehenditur ; contra autem alii homines non pauci , veris utuntur principiis , errant autem in *consequentiis* . Itaque huc mihi maxime reducendum videtur Geometrici studii pretium ; si nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi , eodemque cognitionum gradu præditos , atque *cæteris* , ut vulgo dicunt, *paribus* , unus autem sit Geometriæ auxilio adjutus , alter autem destitutus , facile mihi persuadeo virum Geometram in quolibet scribendi genere , in tractanda etiam quæstione Theologica multo excellentiorem futurum ; neque enim quæ prima sunt , postrema dicet, & vicissim ; nec quæ perspicua sunt & illustria , minus accurata methodo obscurabit , aut quæ abstrusa sunt & involuta densiori caligine non obvolvet . Verum ne Geometriæ studio nimis tribuere videar & hanc quam maxime amo, disciplinam magnificentius prædicare , de iis non loquor melioris ingenii viris in quibus excellens judicium meditatione & experientia subactum atque perfectum miramur, sive graviora tractanda sint negotia , sive studiis quibuscumque danda sit opera . Has justissimas Geometriæ laudes attigisse satis sit ad excitandam adolescentum voluntatem . Faxit D. O. M. ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus Physicis tantum , sed etjam ut in studiis gravioribus , quem quidem fructum maxime exopto , ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant atque urgeant, hujus tamen sanctissimi dogmatis probe memores : *Captivare intellectum in obsequium fidei* .

Cæterum monendum superest Scolia & Appendices in his Elementis prætermitti posse ab iis qui minori pollent intelligendi facilitate ; minus enim necessaria sunt hæc additamenta .



I N-

INDEX.

CAP.

APPROBATIO.

Reverendiſſimi Patris Thomæ Auguſtini Ricchini Ordinis Prædicatorum Sacri Palatii Apoſtolici Magiſtri juſſu legi doctiſſimi eruditiſſimique Viri Reverendiſſimi Patris Jacquier *Elementa Arithmeticæ*, *Algebræ*, *& Geometriæ &c.* Quantum inde voluptatis cœperim, difficile eſt exiſtimare. Nam cum nihil contineat, quod ab orthodoxæ Chriſtianæ Religionis decretis, atque inſtitutis diſcrepet, tum ita eſſe comperi, ordine, accurate, dilucide, eleganter, tantoque nexu, ac tanta colligatione rerum perſcriptum, ut ad ejus Phyſicas Inſtitutiones illuſtrandas nihil ſupra deſiderari poſſe videatur. Quare illud aio, me vehementer cupere, ut quam fieri cito poteſt, in publicam emittatur lucem.

Dabam Romæ ex Monaſterio S. Mariæ Novæ die 4 *Menſe Decembri ann.* 1760. D. ALOYSIUS STAMPA *Abbas Olivetanus, Promovendorum ad Epiſcopatum Examinator, & in Collegio Urbano de Propaganda Fide Studiorum Præfectus.*

ER.

ERRATA IN ARITHMETICA ET GEOMETRIA.

Pag. 14. lin. 14. minorem	leg. majorem
p. 18. l. 12. 2.	l. 3.
p. 24. l. 22. $= \times$	l. $= +$
p. 32. l. 7. $\frac{ac}{b}$	l. $\frac{a + c}{b}$
p. 35. l. 33. 93.	l. 91.
p. 37. l. 3. b	l. $-$ 2b
p. 38. l. 1. $\frac{4}{100}$	l. $\frac{4}{1000}$
p. 41. l. 9 r $\times$ 1	l. r + 1
p. 42. l. 11. 32, 478	l. 51, 870.
p. 45. l. 5. x	l. 2x
p. 53. l. 2 $\frac{a^n}{b^n}$	l. $\frac{a^m}{b^m}$
p. 53. l. 16. a^{62}	l. a^{6-2}
p. 56. l. 16. $\times$ m	l. + m
p. 57. l. 1 b^1	l. $b^{\frac{1}{2}}$
p. 57. l. 2. $\frac{b}{2a^{\frac{1}{}}}$	l. $\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$
p. 57. l. 15. $\frac{1}{2} \times \frac{}{2}$	l. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
p. 57. l. 15. $-$ $aa^{\frac{1}{}}$	l. $\times$ $aa^{\frac{1}{2}}$
p. 59. l. 21. & 10	l. & 10, 7,
p. 64. l. 15. si una	l. si una sit
p. 66. l. 6. $\frac{r}{1^{n-1}}$	l. $\frac{y}{1^{n-1}}$
p. 72. l. 3. 12x	l. 12 $-$ x
p. 72. l. 9. 2y	l. 24

Pag.

Pag. 74. lin. 2. $\frac{16x\ 2800}{9} + \frac{16x - 2800}{27} = \frac{64x\ l\ 4800}{27}$ leg. $\frac{16x + 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$

p. 77. l. 23. $\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$	l. $\mp \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$
p. 79. l. 19. q^2	l. q.
p. 90. l. 15. DFD	l. DFO
p. 97. l. 22. DF	l. $\frac{1}{2}$ DF.
p. 97. l. 25. Ad	l. Ab
p. 98. l. 7 cor. 2.	l. cor. 5.
p. 99. l. 9. cor. 2.	l. cor. 5.
p. 107. l. 36. af	l. ef
p. 109. l. 2. BD^2	l. BC^2
p. 109. l. 22. BO	l. EO
p. 109. l. 29. DAC	l. DAE
p. 109. l. 36. EC	l. ED
p. 114. l. 12. $\frac{1}{\infty}\ \frac{1}{\infty}$	l. $\frac{1}{\infty}\ 2\ \frac{1}{\infty}$
p. 116. l. 35. aCD	l. aCd

Pag. 119. *post lin.* 10. *scribatur : quod facile colligitur ex præcedentibus, sed tamen demonstratur pag.* 121. *num.* 3.

p. 119. l. 19 $x^{\sin P}$	l. $x \frac{\sin.\ P}{\cos.\ P}$
p. 121. l. 29. KFC	l. KFG

p. 121.	l. 29.	CK	l.	GK
p. 122.	l. 5.	major eſt 30	l.	major eſt
p. 122.	l. 12.	50°	l.	5°
p. 122.	l. 13.	630	l.	65.
p. 137.	l. 26	minor	l.	major
p. 141.	l. 27.	FE	l.	Ff

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ TUM VULGARIS, TUM SPECIOSÆ.

CAPUT I.

De præcipuis utriusque Arithmeticæ operationibus generatim consideratis.

I. ARithmetica generatim definitur *scientia computandi*. Computatio autem vel fit per vulgares numeros ac proinde & determinatos, 1. 2. 3. &c., vel per alphabeti litteras a, b, c, &c. quæ numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio, *Arithmetica* simpliciter dicitur; altera autem vocatur Arithmetica *speciosa*, vel *Algebra*; convenientius a Nevvtono Arithmetica *universalis* appellatur. Has quidem definitiones juxta vulgarem docendi consuetudinem præmittimus; monendum tamen est scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens præcedat analysis atque accurata explicatio. Ita in præsenti casu, explicatis Arithmeticæ & Algebræ operationibus, recte jam dicere liceret: Hæc quam vobis explicavimus scientia, ea est quæ *arithmetica* vel *algebra* vocatur. Per *numerum* Arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem*. At accuratius a Nevvtono definitur numerus, *relatio* seu *ratio* quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem; quæ quidem definitio ut in bono lumine collocetur, observandum est quantitatem quamlibet cum alia ejusdem generis quantitate com-

paratam, vel ea minorem esse, vel majorem, vel tandem ipsi æqualem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere; hic autem modus quo magnitudo aliqua aliam continet vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3. exprimit rationem magnitudinis alicujus ad aliam minorem quæ pro unitate assumitur, & in majori ter continetur. Contra autem si quantitas major 3, pro unitate adhibeatur, erit quantitas, 1, tertia pars quantitatis majoris quæ tamquam unitas consideratur, sive, 1, ter in quantitate majori continetur. Inde autem intelligitur quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur quem unitas metitur; fractus quæ est pars unitatis; ita 1. 2. 3, &c. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta &c. pars unitatis sunt numeri fracti; ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ &c. Ratio quam modo definivimus, si nempe consideretur quomodo quantitas una alteram contineat dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur vel *geometrica*, vel *arithmetica* pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur, & prima ad secundam esse dicitur ut tertia ad quartam.

II. Numeri omnes in vulgari Arithmetica decem notis sive characteribus designantur; sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 quorum ultimus *cyphra* sive *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso quem occupant loco. Quæ ad sinistram postremæ occurrunt, designant unitates, quæ proxime præce-

cedunt unitatum decadas; exinde centenarii ſequuntur, millenarii, & ſic deinceps per decadas & centenarios progrediendo. Huic autem uſui potiſſimum cyphra deſtinatur; cum nempe ipſa nullum deſignet numerum, auget tamen reliquarum notarum ſignificationem, longius illas ab extremo verſus ſiniſtram numero removens; ſic unitatis nota quæ ſola unicam deſignaret unitatem, beneficio unius vel duplicis cyphræ in ſecundum aut tertium locum rejecta denas unitates aut centenas ſignificabit. Breviores numeri facile leguntur; ita 247, exprimunt ducentas quadraginta ſeptem unitates; at in prolixioribus numeris aliquo opus eſt artificio; ita ſi legere oporteat longiorem nume-

. 3. . 2 . 1 .

rum 3242578562914020467212, hunc ita divides a poſtremis numeris exorſus; nempe tres poſtremos divides a præcedentibus puncto ſuperius appoſito, tribus ſequentibus adſcribes 1, & ſic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones vel numerum, ita tamen ut numeri unitate ſemper augeantur, quemadmodum hic factum vides. His peractis, quamlibet notarum claſſem perinde leges ac ſi ſola eſſet, & ubi punctum invenies dic mille; ubi, 1, dic decies centena millia, ſeu, ut vulgo loquimur *millionem*; ubi, 2, dic milliones millionum, ſive *billiones*; ubi 3, dic *trilliones*, & ſic deinceps. Sic itaque legendus eſt numerus præcedens: ter mille ac ducenti quadraginta duo trilliones, quingenta ſeptuaginta octo millia ac quingenti ſexaginta duo billiones, nongenta quatuordecim millia ac viginti milliones, quadringenta ſexaginta ſeptem millia, bis centum ac duodecim.

III. Vulgares explicavimus Arithmeticæ characteres quorum auctores feruntur Aſtronomi ara-

bes; aliquid jam dicendum est de notis quæ *Romanæ* appellantur. Notæ illæ quarum in physicis institutionibus usus recurret, majusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuisse creditur quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres Romani. Litteræ quæ numeros Romanos componunt, sunt septem sequentes. I. V. X. L. C. D. M. harum notarum hæc est significatio I. unitas. V. quinque. X. decem. L. quinquaginta. C. centum. D. quingenta. M. mille. Si duo I scribantur in hunc modum II. æquivalent binario; si tria scribantur, significant ternarium. Numerus quaternarius ita exprimitur. IV, & numerus novenarius hoc modo IX, nempe unitas numeris V, X, præfixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6. 7. 8. scribi solet VI. VII. VIII. Si numero L, vel C, præmittatur X, numeri illi decade minuuntur; ita XL significat 40, & XC 90.: contra autem si numerum L sequatur X, in hunc modum LX, numerus præcedens augetur decade significans 60 &c. Aliquando numerus 400. expressus fuit litteris CD, sed raro. Præter litteram, D, quæ exprimit 500, idem numerus significatur etiam hoc modo IↃ. Ita etiam loco M, aliquando scribitur CIↃ. Eodem modo exprimi potest 600 per IↃC; & 700 per IↃCC &c. Si litteræ C & Ↄ, ante & post addantur, numerus CIↃ augetur in ratione decupla; ita CCIↃↃ significant 10000, CCCIↃↃↃ, 100000 &c. Hi erant communes Arithmeticæ characteres apud veteres Romanos, qui etiam numerum millenarium designare solebant, adscripta numeris millenario minoribus lineola; hoc modo. $\overline{\text{V}}$ significat 5000, $\overline{\text{LX}}$ designat 60000. Simi-

militer M æquivalet 1000000. $\overline{MM}$ designat 2000000. A recentioribus nonnullis Scriptoribus variationes aliquæ fuerunt adhibitæ, ita litteris IIX. designant 8, litteris IICIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas iniverint veteres Romani, nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt arithmeticam quam quidem invenire problema est a viris arithmeticæ & antiquitatis studiosis solvendum, nec fortasse difficile.

IV. Quoniam numeri nihil aliud sunt quam rationes quædam mente perceptæ & certis signis distinctæ, evidens est Arithmeticam sive scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur arithmeticæ operationes præcipuæ. Etenim diversæ numerorum combinationes huc revocari possunt ut nempe mutuus eorum excessus, vel modus quo se invicem continent, expendatur & assignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandæ quatuor vulgares arithmeticæ operationes: *Additio*; *subtractio*: *multiplicatio*: *divisio*.

V. Additio vocatur illa Arithmeticæ operatio qua plures numeri simul colliguntur; subtractio autem dicitur operatio qua numeri a se invicem subtrahuntur. Ita si addantur 2 & 3 ut efficiantur, 5; vel minor numerus 2 a majori 3 subtrahatur ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio. Patet in additione & subtractione considerari mutuum numerorum excessum; etenim in additione excessus summæ ab alterutro numero innotescit; in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur. Multiplicatio appellatur illa arithmeticæ operatio qua

 idem

idem numerus ſibimetipſi pluries additur; ita ſi, 3, per 4, multiplicari debeat, idem eſt ac ſi, 4, ſibi ipſi ter addatur, vel 3 ſibi ipſi quater adjungatur, prodibitque 12. Diviſio eſt arithmeticæ operatio in qua numerus unus ab alio ſubtrahitur, quantum fieri poteſt; ita numerus, 4, ex 12, ter ſubtrahi poteſt. Itaque patet in multiplicatione & diviſione conſiderari modum quo numeri ſeſe mutuo continent. Ita in præcedenti multiplicatione innoteſcit numerum 12, ter continere numerum 4; per diviſionem autem demonſtratur numerum, 4, ter contineri in 12. Ex his evidens eſt multiplicationem nihil aliud eſſe quam additionem compoſitam; atque etiam diviſio nihil aliud eſt quam compoſita ſubtractio. Quare ad duas duntaxat revocari poſſunt quatuor vulgares arithmeticæ operationes. Hinc Arithmeticæ operationes accurate omnino definivit Nevvtonus: *compoſitionem & reſolutionem arithmeticam*, quæ quidem definitio ex ipſa arithmeticarum operationum natura derivatur. Quamvis autem numeri ſint rationes geometricæ, ex dictis tamen evidens eſt additionem & ſubtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticam, multiplicationem vero & diviſionem ad rationem geometricam referri. Ceterum præter vulgares quatuor enumeratas operationes, aliæ ſunt plurimæ, ſed hæ omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifeſtum fiet. Hic autem regulas Arithmeticæ generatim conſideraſſe ſatis ſit; patet autem hanc quam tradidimus arithmeticæ notionem, Arithmeticæ ſpecioſæ communem eſſe. Itaque licet arithmeticæ nomen generatim uſurpemus, illud tamen de Arithmetica ſpecioſa intelligi quoque volumus. Jam vero univerſam arithmeticæ utriuſque doctrinam breviter & diſtincte explicemus,

quan-

quantum postulant nostrarum institutionum necessitas, atque injuncta brevitas.

CAPUT II.

De quatuor primis Arithmeticæ operationibus in numeris integris.

I. PRima Arithmeticæ operatio dicitur *additio* quæ ex præcedentibus satis intelligitur. Totam hujus operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PROBL. I.

Numeros integros addere, sive in unam summam colligere.

I. ADdendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adscribe serie descendente, ut unitates unitatibus subjiciantur, decades decadibus & sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola & a postrema columna exorsus dic, 1 & 8 efficiunt 9, 9 & 2 efficiunt 11, 11 & 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum ac præterea duas unitates. Quare scribe, 2, in columna unitatum, & decadem rejice in sequentem decadum columnam dicens; 2 & 1 efficiunt 3, 3 & 6 efficiunt 9, 9 & 9 efficiunt 18, 18 & 6 efficiunt 24, hoc est, duas decadas decadum sive duo centenaria & 4 decadas; scribe ergo quatuor in loco decadum, & duo centenaria in sequentem columnam rejice, eodemque pacto in hac & reliquis operare, & tandem invenies summam quæsitam 82042.

Exempl.
23561
392
8768
49321
82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem rejiciuntur quot decades collectæ sunt; quod quidem faciendum esse evidens est, cum nota quælibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo, valorem habeat in columna sequente, decuplo majorem quam in præcedente. Igitur in hac operatione adduntur singulæ unitates, decades, singula centenaria. Quare patet hujus operationis ratio quæ quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur.

PROBL. II.

Numeros integros subtrahere.

II. SEcunda arithmeticæ operatio dicitur *subtractio*, cujus totum hoc est artificium. Ut numerum datum a dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri a quo subtrahi debet, ita subjicies ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus & sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe, & residuum scribe infra lineolam, habebis numerum qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat inferiorem notam superiori majorem esse, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies a proxime sequenti nota quam proinde deinceps habebis tamquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2; auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 subduci

Exempl.
23897
4245
19652.

ue-

nequeat, adjice huic denas unitates, & auferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam superiorem proxime sequentem unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti ut denis unitatibus præcedentem augeres; habebis ergo residuum 1, ideoque residuum totum 19652.

Demonstratio satis per se constat, cum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus &c. Nam quod in hoc exemplo numerus 3, decem augeatur unitatibus, & numerus sequens, 2, unitate mulctetur, ratio patet. Hæc nempe unitas in numero 3, decadi unitatum æqualis est, earum scilicet quibus constat idem numerus 3; quare etiamsi unitatem dumtaxat ille amittat, huic tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphræ ex quibus proinde nulla fieri potest subtractio, ex numero proxime antecedenti mutua accipienda est unitas quæ in cyphram sequentem translata decem unitatibus æquivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur atque ita deinceps. Quare patet cyphram ultimam decem unitatibus æqualem esse, ceteras vero antecedentes æquari novenario. Itaque evidens est hujus operationis ratio nec vulgarium axiomatum ope facilius intelligitur.

Ex additionis & subtractionis natura manifestum est duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre & sese invicem confirmare. Etenim cum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia, patet minorem numerum residuo sive differentiæ additum majori numero æqualem esse. Item cum additio sit plurium numerorum aggregatum, si ex aggregato alteruter numerus auferatur, numerum alterum remanere necessum est. Si igitur

explorare velis utrum additio rite peracta sit, subtractione utendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

III. TErtia Arithmeticæ operatio vocatur *multiplicatio* in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties sumitur numerus multiplicandus quoties unitas continetur in numero per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumptum 12 efficere. At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita ut unitates unitatibus subjiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a postremis facto. Decadas quæ inter multiplicandum colliguntur, sepone adjiciendas producto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris infra lineolam seorsim notentur, ita ut uniuscujusque unitates subjiciantur numero per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43 sub 235; tum ducta lineola dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante, 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3 quod est 9, cui si addas 1, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates;

Exempl.

235
43
705
940
10105.

scri-

ſcribe igitur 0, & facto ex 3 in 2 adjiciens 1, ſcribe 7, rurſus dic 4 in 5 efficiunt 20, ſcribe, 0, ita ut multiplicatori, 4, ſubjaceat, & facto ſequenti 4 in 3 quod eſt 12, adjiciens, 2, habebis 14; ſcribe igitur 4, & ſeponens 1 dic, 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1 ſcribe 9. Demum ducta linea, collige in unam ſummam hos numeros ita diſpoſitos, eritque 10105 productum quæſitum.

Demonſtratio evidens eſt ex ipſa notarum arithmeticarum natura; ſi nempe in memoriam revocetur numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus quam in poſterioribus, illico enim manifeſtum fiet toties ſumi in producto numerum multiplicandum quoties unitas continetur in numero per quem fit multiplicatio.

PROBL. IV.

Numeros integros dividere.

IV. QUarta Arithmeticæ operatio vocatur *Diviſio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quæſtio ut inveniatur quoties in numero dividendo contineatur diviſor, totieſque auferatur, atque totidem unitates ſcribantur in numero qui idcirco *quotus* dicitur. Hæc ergo genuina eſt diviſionis notio, nempe dividendus eſt ad diviſorem ut quotus eſt ad unitatem; vel dividendus eſt ad quotum ut diviſor eſt ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43. Numero dividendo diviſorem præfige lineola interjecta, tum operationem inſtituens in pri-

Exempl.

43 | 10105 | 235
86
——
150

 mis

mis notis dividendi quæ exhibeant quantitatem divisori æqualem vel proxime majorem, dic quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo, 2, lineola pariter interjecta ex altera parte dividendi, & factum ex, 2, in 43 sive 86 aufer ex 101 & residuo 15 notam appone quæ in dividendo proxime sequitur quantitatem jam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur in 150, quotus est 3 quem scribe ut ante, & factum ex 3 in 43 seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam dividendi 5, & dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit, 5, quem scribe cum aliis quoti notis & aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Cum nihil ex ea divisione supersit, patet numerum 235 illum accurate esse qui oritur ex divisione 10105 per 43.

129
215
215
000

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus in hujusmodi operatione rem perinde se habere, ac si quæreretur quota pars quantitatis alicujus singulis hominibus obveniret, si eam ex æquo tot hominibus distribui oporteret quot unitates continet divisor. Nam in tota operationis serie inquirimus quot unitates, decades &c. singulis dari possint, iisque datis quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Facile autem intelligitur post quamlibet subtractionem peractam id quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, divisore minorem esse oportere; nam si residuum æquale foret vel majus, divisor in quantitate jam divisa pluries contineretur quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris longioribus statim non pateat quoties di-

visor

visor in dividendi notis contineatur; tentamine utendum est; divisor nempe per numeros ab, 1, ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, & explorandum est quinam ex illis numeris sit proxime minor; pones in quoto numerum in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Cæterum qui in Arithmetica satis fuerit exercitatus, facile conjiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet & divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis Arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præsenti operatione quæ est omnium difficillima rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2, statim patet in quoto contineri centenarios, decadas & unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit, 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit 0. Patet ergo divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est dividi debet 10 per 2. Statim autem video 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur, 0, in quoto, tum ut indicetur quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ, 2, suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad, 6, qui numero præcedenti, 1, apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur qua de causa in quoto scribatur cyphra, imo & plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adjicienda est fractio. Ita si in exemplo præce-

cedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numeri 417 ex æquo hominibus, 2, partiri debeas, singuli acciperent nummos 208 & dimidiam partem nummi quæ ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet satis esse primam dividendi notam per primam divisoris notam dividi, si in divisore & dividendo idem sit notarum numerus: Verum si dividendus plures contineat notas, persæpe necesse est duas primas dividendi notas primæ divisoris notæ subjici, idque fieri debere evidens est quoties datus notarum numerus in divisore minorem habet valorem quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo; verum si duæ adhibeantur dividendi notæ, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, sumptis in dividendo tot notis quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una insuper adjecta, notarum numerum in quoto, unitate excedere residuum notarum numerum in dividendo. Inde autem facile colligitur nullum in quoto numerum novenario majorem esse posse; Etenim divisor decies æqualis esse non potest assumptæ dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur; at pars dividendi assumpta habet notarum numerum, notarum divisoris numero æqualem vel unitate majorem. In primo casu evidens est dividendi partem assumptam minorem esse divisore decies sumpto, cum notarum numerum habeat unitate minorem. In secundo casu, pars dividendi assumpta, si nota una versus dextram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus simul cum hac nota restituta, minor est divisore decies sumpto.

Divisionis rite peractæ argumentum habebis, si

ſi diviſorem in quotum ducas, redeatque diviſus numerus; nam ſi non redeat, manifeſtum eſt alicubi errorem eſſe admiſſum; quod quidem patet ex ipſa diviſionis natura; cum dividendus toties contineat diviſorem, quoties unitas continetur in quoto; quare cum quotus exprimat quoties diviſor contineatur in dividendo, ſi diviſor per quotum multiplicetur, dividendum ipſum reſtitui neceſſe eſt. Cæterum patet, ſi diviſorem accuratum habere non licuit, facto ex diviſore in quotum addendum eſſe reſiduum ex ultima diviſionis ſubtractione, ut redeat diviſa quantitas. Contraria ratione evidens eſt multiplicationis rite peractæ haberi argumentum, ſi productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem; in primo caſu quotus fit multiplicator; in caſu autem altero quotus eſt multiplicandus. Cum enim diviſio ſit multiplicationi contraria, per diviſionem reſolvitur quod in multiplicatione componitur & contra. Cæterum in multiplicatione & diviſione compendia plurima uſus docebit; hic monere ſatis erit multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, ſi in producto ſcribantur tot cyphræ quot occurrunt in multiplicando & multiplicatore ſimul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat ſecundum regulas prædictas. Item in diviſione, ſi diviſor & dividendus cyphras contineant, in dividendo delendæ ſunt tot cyphræ quot occurrunt in diviſore quæ etiam in ipſo diviſore deberi debent & reliqua operatio peragenda, ut ante. Notandum autem eſt compendium illud valere dumtaxat, ſi cyphræ fuerint ultimæ tum diviſoris, tum dividendi notæ; quod quidem manifeſtum eſt ex cyphrarum natura.

Scolium. In præſenti capite ſermonem habui-

buimus dumtaxat de numeris homogeneis, sive ejusdem speciei, at pari facilitate in numeris heterogeneis, seu diversæ speciei absolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes &c. At si numerum, 3, generatim enuntiaveris, nec rem aliquam designaveris, numerus vocatur abstractus. Jam in numeris diversæ speciei additio & subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species; ita si addi debeant lineæ, pollices, pedes, exapedæ, sciendum est lineas 12, pollicem unum æquare; pollices 12, pedem unum, & exapedam ex pedibus 6 constare. Ubi autem in linearum additione summa efficitur quæ 12 excedit, tot unitates inter pollices referri debent quot sunt numeri duodenarii, quod vero reliquum est seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet, & ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio; si quantitas subtrahenda, E. G. linearum numerus justo major sit, jam ex quantitate præcedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis atque heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione vel subtractione, unitas mutuo accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas quæ mutuo accipitur, eum retinet valorem qui speciei suæ respondeat. Hæc de additione & subtractione.

Quod

Quod multiplicationem ſpectat, improprie omnino a quibuſdam Arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum eſt, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, juliis 3, aſſibus 3, in nummos 3, julios 3, aſſes 3. Etenim in eo ſita eſt multiplicatio ut data quædam quantitas datis vicibus ſumatur, ac proinde multiplicator debet eſſe numerus abſtractus. Qua ratione autem quantitates diverſæ ſpeciei per numerum abſtractum multiplicentur, facile patet; Si, E. G. productum ex lineis in numerum abſtractum majus ſit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates quot ſunt numeri duodenarii, quod autem reliquum eſt inter lineas ſcribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abſtractus eſſe debeat multiplicator, res tamen aliter ſe habet in diviſione; nam dividendus ſemper cenſetur numerus concretus, diviſor autem vel concretus vel abſtractus eſſe poteſt. Ita dividi poſſunt nummi, 6, per nummos, 2, hoc eſt, inveſtigari poteſt quoties, 2, contineatur in, 6, quotus 3 erit numerus abſtractus. Poteſt etiam dividi numerus concretus per numerum abſtractum, ita nummos, 6, dividere poſſumus per 3, hoc eſt inveſtigare poſſumus tertiam partem nummorum, 6, quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Jam ut perſpicua habeatur diviſionis notio, ad ipſam definitionem redeamus. In diviſione ſcilicet dividendus eſt ad diviſorem ut quotus eſt ad unitatem, vel dividendus eſt ad quotum ut diviſor ad unitatem. Probe autem obſervari debent illæ duæ proportiones, licet una eademque videantur. Dividendus tanquam numerus concretus ſemper habetur, concretus autem vel abſtractus eſſe poteſt numerus diviſor. In

1° ca-

1° casu quotus erit numerus abstractus, & locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus & locum habet proportio altera; quæ quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi, 6, *numerus concretus* dividantur per nummos, 2, *numerum*, itidem, *concretum*, quotus erit numerus abstractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet quoties divisor continetur in dividendo; erunt nempe, 6, nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus, 2, est ad unitatem abstractam 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *dividendus* & *concretus*) sunt ad quotum 3 (numerum abstractum), ut nummi 2, (*numerus divisor* & *concretus*) ad 1 (numerum abstractum). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem; cum enim numerus concretus & numerus abstractus diversi sint generis, nulla inter eos comparatio & ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, & secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per numerum abstractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus scilicet concretus), habebiturque hæc proportio; numerus concretus nempe 6 nummi erit ad quotum nummos 2, ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest; vel enim quæritur, quoties quantitas una in altera ejusdem generis quantitate continetur, & hic est primus casus, vel quæritur quantitas quæ certis vicibus in alia ejusdem generis quantitate contineatur, & hic est casus secundus. Facile autem patet

ex

ex demonstratis quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos etiamsi fuerint diversæ speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumpto ab iis qui majorem habent valorem, divisio ex regulis præscriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. G. Si residui fuerint pedes, reducantur in pollices atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversæ speciei per concretos itidem diversæ speciei dividi oporteat, jam numeri tum dividendi tum divisoris ad minimam speciem deprimantur, quod per multiplicationem fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numeris abstractis. Cæterum in multiplicatione & divisione quantitatum diversæ speciei, varia adhiberi possunt operandi compendia quæ sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis jam hausimus; in operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti, ad majorem operationum facilitatem; verum ad formandam earumdem operationum ideam distinctam, necesse est ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CAPUT III.

De quatuor præcedentibus operationibus in Arithmetica speciosa absolvendis.

PROBL. I.

Quantitates litterales addere.

I. QUantitatibus litteralibus præfiguntur signa quorum significationem præmitti omnino necessum est. Signum additionis est +, signum autem subtractionis est −, æqualitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo =. Ita a = a, a − a = o. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali præfigatur numerus aliquis, hic *coefficiens* vocatur, ita in quantitate litterali 2a, numerus, 2, coefficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum præfixum habeat, jam unitas tanquam illius coefficiens censeri debet; ita a = 1 a, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras & eundem earumdem litterarum numerum, etiamsi diversis coefficientibus notentur; ita + 2a & − 5a sunt quantitates similes: at *dissimiles* sunt quantitates, a, & b, atque etiam quantitates, a, & aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur quæ plures habet litteras signo + vel − connexas. Ita a + b constat ex duobus terminis & *binomium* dicitur; a + b + c ex tribus terminis componitur & *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex* atque etiam *monomium*; ita, a, ab, abc, sunt quantitates simplices. His præmissis definitionibus, quantitatum litteralium additio jam

jam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a & a addi debeant, habebitur 2a; si addere oporteat a & 2a, summa erit 3a, & ita deinceps; satis nempe est in hoc casu addi coefficientes & coefficientium summam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem servato signo + vel −, si quantitates eodem signo afficiantur. At si diversa fuerint signa, jam coefficiens minor a majori subtrahi debet & differentia cum majoris coefficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum & positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivæ quantitatibus negativis sunt directe contrariæ. Quare si quantitates addendæ similes sint signisque contrariis affectæ, vel se se omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe si quantitas una sit altera major, destruitur in majori quantitate pars minori æqualis; & residuum est quantitatis utriusque differentia, quæ quidem differentia signo majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens est quantitates 5df, & − 3df reduci ad + 2df; nam 5df est quantitas df, quinquies sumpta, & − 3df est quantitas df, ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumpta & ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumptam. Similiter + 5fm & − 6fm reducitur ad − 1fm, vel ad − fm. Nam − 6fm est quantitas fm, sexies subtracta, & + 5fm est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas, fm, semel subtrahitur, & remanet negativa, seu fit − fm. Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendæ ita disponuntur, ut

Exemplum.

3ab	− 5cs	− 4dr	+ 2s
− ab	+ 4cs	+ 4dr	− s
2ab	− cs	*	+ s

explorare velis utrum additio rite peracta sit, subtractione utendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

III. TErtia Arithmeticæ operatio vocatur *multiplicatio* in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties sumitur numerus multiplicandus quoties unitas continetur in numero per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumptum 12 efficere. At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita ut unitates unitatibus subjiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a postremis facto. Decadas quæ inter multiplicandum colliguntur, sepone adjiciendas producto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta quæ emergunt ex singulis notis inferioris, in omnes superioris infra lineolam seorsim notentur, ita ut uniuscujusque unitates subjiciantur numero per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43 sub 235; tum ducta lineola dic. 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante, 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3 quod est 9, cui si addas 1, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates;

Exempl.

```
  235
   43
 ----
  705
 940
 ----
10105.
```

scri-

scribe igitur 0, & facto ex 3 in 2 adjiciens 1, scribe 7, rursus dic 4 in 5 efficiunt 20, scribe, 0, ita ut multiplicatori, 4, subjaceat, & facto sequenti 4 in 3 quod est 12, adjiciens, 2, habebis 14; scribe igitur 4, & seponens 1 dic, 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1 scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos, eritque 10105 productum quæsitum.

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura; si nempe in memoriam revocetur numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus quam in posterioribus, illico enim manifestum fiet toties sumi in producto numerum multiplicandum quoties unitas continetur in numero per quem fit multiplicatio.

PROBL. IV.

Numeros integros dividere.

IV. QUarta Arithmeticæ operatio vocatur *Divisio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quæstio ut inveniatur quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur, atque totidem unitates scribantur in numero qui idcirco *quotus* dicitur. Hæc ergo genuina est divisionis notio, nempe dividendus est ad divisorem ut quotus est ad unitatem; vel dividendus est ad quotum ut divisor est ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43. Numero dividendo divisorem præfige lineola interjecta, tum operationem instituens in pri-

Exempl.

43	10105	235
	86	
	——	
	150	

 mis

mis notis dividendi quæ exhibeant quantitatem divisori æqualem vel proxime majorem, dic quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo, 2, lineola pariter interjecta ex altera parte dividendi,	129 ——— 215 215 ——— 000

& factum ex, 2, in 43 sive 86 aufer ex 101 & residuo 15 notam appone quæ in dividendo proxime sequitur quantitatem jam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur in 150, quotus est 3 quem scribe ut ante, & factum ex 3 in 43 seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam dividendi 5, & dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit, 5, quem scribe cum aliis quoti notis & aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Cum nihil ex ea divisione supersit, patet numerum 235 illum accurate esse qui oritur ex divisione 10105 per 43.

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus in hujusmodi operatione rem perinde se habere, ac si quæreretur quota pars quantitatis alicujus singulis hominibus obveniret, si eam ex æquo tot hominibus distribui oporteret quot unitates continet divisor. Nam in tota operationis serie inquirimus quot unitates, decades &c. singulis dari possint, iisque datis quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Facile autem intelligitur post quamlibet subtractionem peractam id quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, divisore minorem esse oportere; nam si residuum æquale foret vel majus, divisor in quantitate jam divisa pluries continaretur quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris longioribus statim non pateat quoties divisor

visor in dividendi notis contineatur; tentamine utendum est; divisor nempe per numeros ab, 1, ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, & explorandum est quinam ex illis numeris sit proxime minor; pones in quoto numerum in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Cæterum qui in Arithmetica satis fuerit exercitatus, facile conjiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet & divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis Arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præsenti operatione quæ est omnium difficillima rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2, statim patet in quoto contineri centenarios, decadas & unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit, 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit 0. Patet ergo divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est dividi debet 10 per 2. Statim autem video 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur, 0, in quoto, tum ut indicetur quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ, 2, suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad, 6, qui numero præcedenti, 1, apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur qua de causa in quoto scribatur cyphra, imo & plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adjicienda est fractio. Ita si in exemplo præce-

cedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numeri 417 ex æquo hominibus, 2, partiri debeas, singuli acciperent nummos 208 & dimidiam partem nummi quæ ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet satis esse primam dividendi notam per primam divisoris notam dividi, si in divisore & dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persæpe necesse est duas primas dividendi notas primæ divisoris notæ subjici, idque fieri debere evidens est quoties datus notarum numerus in divisore minorem habet valorem quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo; verum si duæ adhibeantur dividendi notæ, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, sumptis in dividendo tot notis quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una insuper adjecta, notarum numerum in quoto, unitate excedere residuum notarum numerum in dividendo. Inde autem facile colligitur nullum in quoto numerum novenario majorem esse posse; Etenim divisor decies æqualis esse non potest assumptæ dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur; at pars dividendi assumpta habet notarum numerum, notarum divisoris numero æqualem vel unitate majorem. In primo casu evidens est dividendi partem assumptam minorem esse divisore decies sumpto, cum notarum numerum habeat unitate minorem. In secundo casu, pars dividendi assumpta, si nota una versus dextram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus simul cum hac nota restituta, minor est divisore decies sumpto.

Divisionis rite peractæ argumentum habebis, si

si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est alicubi errorem esse admissum; quod quidem patet ex ipsa divisionis natura; cum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto; quare cum quotus exprimat quoties divisor contineatur in dividendo, si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Cæterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est multiplicationis rite peractæ haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem; in primo casu quotus fit multiplicator; in casu autem altero quotus est multiplicandus. Cum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur quod in multiplicatione componitur & contra. Cæterum in multiplicatione & divisione compendia plurima usus docebit; hic monere satis erit multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphræ quot occurrunt in multiplicando & multiplicatore simul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas prædictas. Item in divisione, si divisor & dividendus cyphras contineant, in dividendo delendæ sunt tot cyphræ quot occurrunt in divisore quæ etiam in ipso divisore deberi debent & reliqua operatio peragenda, ut ante. Notandum autem est compendium illud valere dumtaxat, si cyphræ fuerint ultimæ tum divisoris, tum dividendi notæ; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scolium. In præsenti capite sermonem habui-

buimus dumtaxat de numeris homogeneis, ſive ejuſdem ſpeciei, at pari facilitate in numeris heterogeneis, ſeu diverſæ ſpeciei abſolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum eſt quid per numerum *concretum*, quid per *abſtractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur quo res aliqua determinata deſignatur, ita ſi dicas tres homines, tres horas, tres pedes &c. At ſi numerum, 3, generatim enuntiaveris, nec rem aliquam deſignaveris, numerus vocatur abſtractus. Jam in numeris diverſæ ſpeciei additio & ſubtractio facile intelliguntur. Probe tenenda eſt diverſa numerorum ſpecies; ita ſi addi debeant lineæ, pollices, pedes, exapedæ, ſciendum eſt lineas 12, pollicem unum æquare; pollices 12, pedem unum, & exapedam ex pedibus 6 conſtare. Ubi autem in linearum additione ſumma efficitur quæ 12 excedit, tot unitates inter pollices referri debent quot ſunt numeri duodenarii, quod vero reliquum eſt ſeu quod duodenario minus eſt, in linearum columna ſcribi debet, & ita deinceps de alia qualibet numerorum ſpecie. Similiter in ſubtractione tota patet operationis ratio; ſi quantitas ſubtrahenda, E. G. linearum numerus juſto major ſit, jam ex quantitate præcedenti, pollicum ſcilicet, mutuo accipienda eſt unitas quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum eſt diſcrimen inter operationes arithmeticas in numeris abſtractis atque heterogeneis peragendas, quod ſcilicet in numerorum abſtractorum additione vel ſubtractione, unitas mutuo accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas quæ mutuo accipitur, eum retinet valorem qui ſpeciei ſuæ reſpondeat. Hæc de additione & ſubtractione.

Quod

Quod multiplicationem ſpectat, improprie omnino a quibuſdam Arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum eſt, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, juliis 3, aſſibus 3, in nummos 3, julios 3, aſſes 3. Etenim in eo ſita eſt multiplicatio ut data quædam quantitas datis vicibus ſumatur, ac proinde multiplicator debet eſſe numerus abſtractus. Qua ratione autem quantitates diverſæ ſpeciei per numerum abſtractum multiplicentur, facile patet; Si, E. G. productum ex lineis in numerum abſtractum majus ſit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates quot ſunt numeri duodenarii, quod autem reliquum eſt inter lineas ſcribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abſtractus eſſe debeat multiplicator, res tamen aliter ſe habet in diviſione; nam dividendus ſemper cenſetur numerus concretus, diviſor autem vel concretus vel abſtractus eſſe poteſt. Ita dividi poſſunt nummi, 6, per nummos, 2, hoc eſt, inveſtigari poteſt quoties, 2, contineatur in, 6, quotus 3 erit numerus abſtractus. Poteſt etiam dividi numerus concretus per numerum abſtractum, ita nummos, 6, dividere poſſumus per 3, hoc eſt inveſtigare poſſumus tertiam partem nummorum, 6, quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Jam ut perſpicua habeatur diviſionis notio, ad ipſam definitionem redeamus. In diviſione ſcilicet dividendus eſt ad diviſorem ut quotus eſt ad unitatem, vel dividendus eſt ad quotum ut diviſor ad unitatem. Probe autem obſervari debent illæ duæ proportiones, licet una eademque videantur. Dividendus tanquam numerus concretus ſemper habetur, concretus autem vel abſtractus eſſe poteſt numerus diviſor. In

1° casu quotus erit numerus abstractus, & locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus & locum habet proportio altera; quæ quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi, 6, *numerus concretus* dividantur per nummos, 2, *numerum*, itidem, *concretum*, quotus erit numerus abstractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet quoties divisor continetur in dividendo; erunt nempe, 6, nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus, 2, est ad unitatem abstractam 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *dividendus* & *concretus*) sunt ad quotum 3 (numerum abstractum), ut nummi 2, (*numerus divisor* & *concretus*) ad 1 (numerum abstractum). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem; cum enim numerus concretus & numerus abstractus diversi sint generis, nulla inter eos comparatio & ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, & secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per numerum abstractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus scilicet concretus), habebiturque hæc proportio; numerus concretus nempe 6 nummi erit ad quotum nummos 2, ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest; vel enim quæritur, quoties quantitas una in altera ejusdem generis quantitate continetur, & hic est primus casus, vel quæritur quantitas quæ certis vicibus in alia ejusdem generis quantitate contineatur, & hic est casus secundus. Facile autem patet

ex

ex demonstratis quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos etiamsi fuerint diversæ speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumpto ab iis qui majorem habent valorem, divisio ex regulis præscriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. G. Si residui fuerint pedes, reducantur in pollices atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversæ speciei per concretos itidem diversæ speciei dividi oporteat, jam numeri tum dividendi tum divisoris ad minimam speciem deprimantur, quod per multiplicationem fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numeris abstractis. Cæterum in multiplicatione & divisione quantitatum diversæ speciei, varia adhiberi possunt operandi compendia quæ sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis jam hausimus; in operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti, ad majorem operationum facilitatem; verum ad formandam earumdem operationum ideam distinctam, necesse est ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CA-

jam explicanda eſt. Si quantitates ſimplices fuerint, tota operationis ratio ſtatim patet. Ita ſi a & a addi debeant, habebitur 2a; ſi addere oporteat a & 2a, ſumma erit 3a, & ita deinceps; ſatis nempe eſt in hoc caſu addi coefficientes & coefficientium ſummam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem ſervato ſigno + vel −, ſi quantitates eodem ſigno afficiantur. At ſi diverſa fuerint ſigna, jam coefficiens minor a majori ſubtrahi debet & differentia cum majoris coefficientis ſigno ſcribenda.

Id quidem evidens eſt ex negativarum & poſitivarum quantitatum natura. Etenim quantitates poſitivæ quantitatibus negativis ſunt directe contrariæ. Quare ſi quantitates addendæ ſimiles ſint ſigniſque contrariis affectæ, vel ſe ſe omnino deſtruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe ſi quantitas una ſit altera major, deſtruitur in majori quantitate pars minori æqualis; & reſiduum eſt quantitatis utriuſque differentia, quæ quidem differentia ſigno majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens eſt quantitates 5df, & − 3df reduci ad + 2df; nam 5df eſt quantitas df, quinquies ſumpta, & − 3df eſt quantitas df, ter ſubtracta; ſed eadem quantitas quinquies ſumpta & ter ſubtracta reducitur ad quantitatem bis ſumptam. Similiter + 5fm & − 6fm reducitur ad − 1fm, vel ad − fm. Nam − 6fm eſt quantitas fm, ſexies ſubtracta, & + 5fm eſt eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas, fm, ſemel ſubtrahitur, & remanet negativa, ſeu fit − fm. Eadem ratione operandum eſt in aliis quantitatibus utcumque compoſitis. Quantitates addendæ ita diſponuntur,

Exemplum.

$$\begin{array}{rrrr} 3ab & -5cs & -4dr & +2s \\ -ab & +4cs & +4dr & -s \\ \hline 2ab & -cs & * & +s \end{array}$$

ut

ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulæ partes seorsim considerantur ut simplices, & additio fit, ut modo præscriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula vel zero. Tota operatio patet ex præsenti exemplo. Si quantitates aliquæ fuerint dissimiles, eas signo + vel − connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a & b, vel a & − b, scribendum est a + b, a − b.

PROBL. II.

Quantitates litterales subtrahere.

II. IN subtractione considerentur quantitates singulæ subtrahendæ tanquam si haberent signum ei quod habent contrarium, & fiat summa, ex legibus jam præscriptis; nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum + in − & − in +, & additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo a − b. Si b − c ex a + c subtrahi oporteat, scribitur a + c − b + c = a − b + 2c. Simili modo in quantitatibus utcumque compositis operandum est. Quantitas sub trahenda inferiori loco scribitur, alia autem ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur; deinde mutatis signis, ut jam dictum est, tota quantitatum series scribitur, & postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatum differentia, infra lineolam scribenda.

Exempl.

ab + abb − dd
ab − bc + dd

ab + abb - dd - ab + bc - dd
= abb + bc − 2dd.

Quod autem in quantitate subtrahenda signum − mutetur in + ratio facile patet. Si ex, a, subtrahi debeat b − d, scribaturque primo a − b, subtractio

justo

justo major est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas, b, sed, b, mulctata quantitate, d; quare justo major est subtractio, & excessus est ipsa quantitas, d, quæ proinde cum signo positivo + restitui debet, & scribendum est $a - b + d$. Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex numero 6 subtrahendus proponatur numerus $5 - 3$, ex præscripta regula scribendum est $6 - 5 + 3$, hoc est, 4 reductione facta; quod evidens est, si enim scriberes $6 - 5 - 3$; subtraheres 8 ex 3, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim sit $5 - 3 = 2$, ex numero 6 subtrahi debet duntaxat numerus 2. Cæterum patet in calculo litterali non secus ac in arithmetico, additionem & subtractionem sibi mutuam probationem præbere, ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PROBL. III.

Quantitates litterales multiplicare.

III. Signum multiplicationis est ×, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti solet, & sola conjunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a = 2$, $b = 10$, erit $ab = 2 \times 10 = 20$, Si eadem quantitas per seipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paulo supra numerus qui exprimat quoties scribenda esset. Ita $aa = a^2$, $aaa = a^3$. Cavendum ne confundatur a^2 cum, $2a$, si $a = 5$ erit $a^2 = 25$, $2 = 10$, si $b = 2$, erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parenthesis autem ( ) vel lineola producta — designat totam quantitatem $a + b$, in seipsam multiplicari. Numerus supra positus est *index*, seu *exponens potentiæ*, ut vocant, vel *potestatis* seu *dignitatis* quantitatis ipsius, & ex-

exprimit quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Ita $1 \times a = a^1$, $1 \times a \times a = a^2$, $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

In quantitatum compositarum multiplicatione scribenda est altera quantitas sub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum e terminis secundæ, scribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam & ita porro, scribendo singula producta in singulis lineis, ac notando similes terminos diversorum hujusmodi productorum alios sub aliis, dende omnium linearum colligenda summa. Omnium vero hujusmodi operationum patet ratio; multiplicatio enim fit per partes non secus ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quatuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coefficientes, litteræ & exponentes; hinc quatuor præscribuntur regulæ. 1°. Si signa fuerint eadem, positiva scilicet vel negativa, productum fit positivum. Contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita $+ \times + = +$, $+ \times - = -$, $- \times + = -$ & $- \times - = +$. 2o. Coefficientes in se invicem multiplicantur. 3°. Litteræ ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. 4. Si quantitas aliqua exponente afficiatur eaque multiplicari debeat per eandem litteram exponente itidem affectam, littera illa semel in producto scribenda est, ita ut tamen hujus quantitatis exponens æqualis sit exponentium summæ. Operatio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per, a, & producta singula

Exempl.

$$
\begin{array}{l}
a^2 + 2ac - bc \\
\qquad a - b \\
\hline
a^3 + 2a^2c - abc \\
\quad - a^2b - 2abc + b^2c \\
\hline
a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c
\end{array}
$$

gula

gula infra lineolam ſcribuntur. Poſtea fit multiplicatio per − b, productaque infra apponuntur, & tandem productorum partes ſingulæ, ut moris eſt, in ſummam colliguntur. Id vero, pro majori additionis facilitate obſervandum eſt, ut ſcilicet ſimiles productorum partes aliæ ſub aliis ſcribantur & ſibi invicem reſpondeant, ut in additione præſcripſimus; quod ſpectat tres ultimas leges, hæ ſatis patent ex antea demonſtratis; verum quod attinet ſignorum doctrinam in bono lumine collocari debet.

Signorum multiplicatio quæ tyronibus difficultatem afferre ſolet, ex ipſa quantitatum negativarum natura intelligi poteſt. Dum quantitas poſitiva + a multiplicatur per aliquem numerum poſitivum + n, ſenſus eſt quantitatem + a, toties ſumi, quoties unitas continetur in, n, ac proinde productum fit na.... Si − a multiplicari debeat per, n, ſenſus eſt − a quantitatem negativam toties ſumi, quoties unitas continentur in, n, ideoque productum eſt − na. Simili modo ſi multiplicetur + a per − n, ſenſus eſt quantitatem, a, toties ſubtrahi quoties unitas continetur in, n, ideoque productum eſt negativum ſeu − na. Si − a multiplicare oporteat per − n, ſenſus eſt − a, toties ſubtrahendum eſſe quoties unitas eſt in, n; ſed ſubtractio quantitatis negativæ − a, æquivalet additioni + a; quare productum eſt + na. Nemo non videt productum ex quantitate poſitiva in poſitivam fieri poſitivum, ſed alii caſus hoc modo rurſus illuſtrari poſſunt. Cum ſit + a − a = o, ſi multiplicetur + a − a per n, productum debet eſſe, o. Jam vero primus producti terminus eſt, na, ergo terminus alter debet eſſe − na, qui deſtruat primum terminum + na, ita ut productum ſit + na − na = o. Qua-

re $- a \times + n = -$ na. Simili modo, si multiplicetur $+ a - a$ per $- n$, primus producti terminus est $-$ na. Quare terminus alter est $+$ na; alioqui termini duo sese mutuo non destruerent; quod tamen fieri debet cum sit $a - a = 0$. Ergo $- a \times - n = +$ na.

PROBL. IV.

Quantitates litterales dividere.

IV. SIgnum divisionis est lineola interposita dividendum separans a divisore, ita $\frac{a}{b}$, designat, a, dividi per, b; divisio etiam designatur interpositis binis punctis hoc modo, a : b. Verum his signis utendum est duntaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum quæ unico constant termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c} = b$, ac proinde quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2bc}{2a^2c} = 3b$. At $\frac{10a^2b}{6a^2c} = \frac{10b}{6c}$. In hoc sita est tota divisionis operatio ut ex dividendo & divisore expungantur litteræ utrique communes, reliquæ autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, evidens est divisionem institui debere non secus ac in Arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo & divisore deleantur litteræ communes, non tamen putandum est quotum ex quantitate per seipsam divisa esse $= 0$, ita $\frac{abc}{abc}$ non est $= 0$, delentur quidem litteræ omnes, sed

quan-

quantitati litterali præfixus semper intelligitur coefficiens 1; sic $\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1} = 1$. Et quidem dum dividitur abc per abc, quæritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quælibet semel in seipsa continetur. Quare in hoc casu, quotus est semper unitas. Quod signorum leges spectat, eædem omnino sunt quæ pro multiplicatione, nempe si + dividatur per + & − per −, quotus signo + afficitur; contra autem si dividatur + per −, vel − per +, quotus afficitur signo −. Tota explicatæ operationis ratio evidens est ex ipsa divisionis natura; cum enim productum ex divisore in quotum dividendo æquale esse debeat, manifestum est quotum ex divisione quantitatis negativæ per negativam, oportere esse positivum. Ponamus enim esse negativum; jam productum ex quoto negativo in divisorem negativum foret positivum, ac proinde non rediret quantitas dividenda quæ ponitur negativa. Simili ratione demonstrantur aliæ signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcumque compositis. Ita si dividi oporteat $9ab^2 - 15a^2b^2 + 6a^3$ per $-3ab + 2a^2$. Singuli termini ita disponi debent ut sumatur divisionis initium ab illo termino qui ad maximam evectus est potestatem, & ita per gradus progrediendo, ut hic factum vides.

Exempl.

$$\begin{array}{l|l} 6a^3 - 15a^2b + 9ab^2 & 2a^2 - 3ab \\ -6a^3 + 9a^2b & \overline{3a - 3b} \\ \hline * \; -6a^2b + 9ab^2 & \\ \;\; + 6a^2b - 9ab^2 & \\ \hline \;\; * \quad * & \end{array}$$

Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$, prodit quotus $3a$ per quem divisor totus multiplicatur, productumque $6a^3 + 9a^2b$ subtrahas ex dividendo, residuum fit $-6a^2b$ cui addas $9a^2b$, & dividere pergas ut ante, quo-

tus

tus eſt — 3b productumque ex hoc quoto & diviſore iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata eſt diviſio; ſi autem peracta operatione aliquid ſuperſit ita ut diviſor & reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, jam diviſio accurate fieri non poteſt, ſed quoto invento jungenda eſt fractio: de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Sæpe contingit diviſionem in infinitum continuari, & tunc quotus fit, ut vocant, *ſeries infinita*. Exemplo ſit unitas dividenda per 1 — a. Operatio eſt hujuſmodi.

$$\frac{1}{1-a}$$

$$\begin{array}{l} +a \\ +a-aa \\ \hline +aa \\ +aa-aaa \\ \hline +aaa \;\&c. \end{array}$$

quotus eſt | $+a+aa+a^3+a^4$ &c. in infinitum.

Hæc pauca exempla ſatis ſint. Cæterum patet multiplicationem & diviſionem in quantitatibus litteralibus non ſecus ac in numeris ſibi mutuam probationem conferre, ita ut multiplicatio per diviſionem & viceverſa diviſio per multiplicationem confirmetur.

Scol. In hoc capite frequens fuit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duæ quantitates magnitudine æquales, ad partes directe oppoſitas ſimul & in eodem ſubjecto conjuncte intelligantur, ſeſe mutuo deſtruunt illarumque effectus nihilo æqualis eſt.

Ita

Ita ſi potentiæ duæ æquales in partes directe oppoſitas agunt, virium illarum effectus nullus eſt. Pari modo ſi aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat, jam illi 100 nummi, ſi ad hujus hominis poſſeſſionem referantur, pro nihilo conſiderari debent. Si autem quis 100 nummos habeat & 200 alteri debeat, jam poſſeſſio hujus hominis negativa eſt, &, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propoſitum locum iter facturus, ad partem directe oppoſitam progrediatur, jam hujus hominis iter tanquam negativum & minus nihilo haberi debet, ſi ad finem propoſitum referatur. Igitur probe tenendum eſt quid intelligatur per quantitatem negativam & nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis eſt quam quantitas poſitiva; Sed nihilo minor dicitur, quatenus poſitivæ quantitati opponitur; juncta ſcilicet quantitati poſitivæ, ipſam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipſum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum & *relative*, non autem *abſolute* nihilo minor dicitur. Hunc loquendi modum a nonnullis uſurpatum ita explicavimus ut nihil difficultatis tyronibus faceſſere poſſit.

CAPUT IV.

De iiſdem operationibus in numeris fractis.

I. NUmeri fracti definitionem jam in primo capite tradidimus. Si diviſor excedat dividendum, duo numeri a ſe invicem, interpoſita lineola, ſeparantur ita ut dividendus ſupra lineolam, & diviſor infra ſcribantur in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ &c. Similiter ſi quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, &

divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duæ quantitates; ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex, a, per, b; tales autem quoti *fractiones*, vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat quot ejusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur, ac proinde pars illa considerari potest tamquam unitas aliqua. E. G. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud quam pars quarta alicujus totius ter sumpta; hæc autem pars quarta tamquam unitas altera haberi etiam potest.

II. Ex fractionum natura intelligitur qua ratione numerus integer ad fractum reducatur atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus, 3, reducendus proponatur ad fractionem cujus denominator 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, erit hæc fractio æquivalens ternario, ut patet; cum numerus, 3, multiplicetur simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones in quibus numerator major est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* dumtaxat ita appellantur. Pari ratione si quantitas, a, reduci debeat in fractionem litteralem cujus denominator sit, b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet quomodo fractiones quæ diversum habent denominatorem, ad eumdem redigantur. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, multiplicetur fractio $\frac{a}{b}$, per, d, simulque dividatur per d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multipli-

ce-

cetur fractio $\frac{c}{d}$ per, b, simulque dividatur, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. Itaque generatim fractiones ad eumdem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius & viceversa, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens est hanc operationem eamdem esse pro quolibet fractionum numero, multiplicentur scilicet numeratores singuli seorsim sumpti per denominatores singulos, proprio excepto denominatore, producta singula dabunt numeratores singulos quæsitos. Deinde denominatores singuli in seipsos ducantur, habebitur denominator communis quæsitus; ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis; ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respective* æquales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

III. Hinc facile adduntur & subtrahuntur fractiones; reducantur scilicet ad denominatorem communem, sumatur numeratorum summa vel differentia, & subscribatur denominator communis. In 1o. casu habebitur additio, in altero autem subtractio. Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$. Sed $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris & fractis compositæ qualis est $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtæ. Ex his autem statim intelligitur quomodo numeri integri & fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi; integri ad fra-

ctos reducantur & ad denominatorem communem, atque operatio fiat ut ante. Quamvis autem additionis & subtractionis operationes ex dictis sint manifestæ, demonstrari tamen possunt hoc modo. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, ad eumdem denominatorem reductæ, erit $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$, & $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b}=m$, & $\frac{c}{b}=n$, erit, facta multiplicatione per, b, $a=mb$, $c=nb$, & $mb+nb=a+c$, ac proinde $m+n=\frac{a+c}{b}$; hoc est $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$. Simili modo patet esse $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=m-n=\frac{a-c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus est ubi fractiones multiplicare & dividere oportet; in multiplicatione satis est numeratores & denominatores invicem ducere, habebitur numerator & denominator fractionis quæsitæ quæ erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, numerator dividendæ per alterius denominatorem est multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducendus est. Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b}=m$, erit, ut ante $a=bm$. Similiter ponatur $\frac{c}{d}=n$, erit $c=dn$. Jam demonstrandum superest esse $\frac{ac}{bd}=mn$, & $\frac{ad}{bc}=\frac{m}{n}$; quod quidem facile patet, substituendo loco a & c, illorum valores bm & dn, erit enim in primo

ca-

casu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in casu autem altero fiet $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonstratio generalis est ac proinde in numeris quibuslibet fractis eadem est operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8} = \frac{8}{48}$. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifesta quoque est operandi ratio, si numerus fractus per integrum multiplicari aut dividi debeat, considerari enim debet numerus integer tamquam fractio impropria in qua denominator est unitas, & reliqua peragenda ut ante. Quare patet in multiplicatione numerum integrum per numeratorem esse multiplicandum; contra autem in divisione per denominatorem. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa præbeat numerum integrum; cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri possit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem; quod quidem paradoxum videtur iis qui multiplicationis & divisionis naturam non satis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri; *fractionem fractionis* appellant fractionis alicujus partem. Ita si sumantur $\frac{2}{3}$, fractionis $\frac{1}{4}$, operatio illa ad divisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur dumtaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{1}{4}$, multiplicandus esset denominator per, 3, habereturque $\frac{1}{12}$. At sumi non debet dumtaxat pars tertia, duæ tertiæ partes sumendæ proponuntur; quare productum præcedens duplo majus fie-

ri debet, hoc eſt, numerator multiplicandus eſt per 2. Eodem modo reduci debent aliæ quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores ſingulos & ſingulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi poſſunt operationum Arithmeticarum compendia plurima, ſi de quantitatibus variæ ſpeciei agatur. E. G. Quæritur quanti conſtiterint 35 menſuræ mercis alicujus, ſi menſuræ unius pretium ſit 24 nummorum, & aſſium 15. Multiplicentur primo 35 per 24 erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem, conſiderari poteſt eſſe $15 = 10 + 5$. Jam ſi aſſes, 10, nummo æquivalerent, productum foret 35. At ſunt pars decima dumtaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10. Simili modo operandum eſt in ultima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis nummorumque partibus compoſitum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotæ quantitatis alicujus appellantur quæ ipſam quantitatem accurate dividunt; ſecus autem partes *aliquantæ* vocantur. Cæterum exercitatio atque attentio multa docebunt quæ fuſius explicare ſuperfluum eſſet.

V. Explicatis Arithmeticæ operationibus in numeris fractis, jam ſupereſt ut communes, ſi quos habeant, fractionum diviſores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem diviſorem præter unitatem, numeri illi inter ſe *primi* dicuntur, cujuſmodi ſunt 1. 5. 7. 11. 19, quos ſola unitas metitur. At numeri *compoſiti* appellantur quos præter unitatem alii quoque numeri metiuntur; ſic 12 componitur ex 2 & 6, itemque ex 3 & 4. Quare 2. 3. 4. 6. metiuntur 12, ſeu aliquoties ſumpti 12, adæquant; illi autem numeri dicuntur *facto-*

res

tes ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicujus denominator sit numerus compositus & resolvi possit in alterius fractionis denominatorem, instituta divisione per numerum qui sit etiam numeratoris divisor communis, jam licebit fractionem hanc ad minimos terminos deprimere, quod ita præstari potest. Dividatur major numerus per minorem; si nihil ex divisione supersit, jam minor numerus est maximus divisor communis. Si autem residuum aliquod fuerit, divisor datus per hoc residuum dividatur; si divisio accurate fiat, primum residuum erit maximus divisor communis. Si autem divisio non sit accurata sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum dividatur primum; si autem nullum supersit tertium residuum, jam residuum secundum pro maximo divisore communi haberi debet, atque ita progrediendum donec nihil supersit, atque ultimus divisor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inventa fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur.

Exemplo sit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto, residuum est 7. Tandem residuum primum 21 per alterum 7 dividatur; habetur quotus 4, & divisio est accurata. Quare numerus 7 est maximus communis divisor per quem divisis numeratore & denominatore, fractio præcedens in hanc simpliciorem abit, $\frac{13}{42}$ $= -\frac{93}{294}$; æquales autem esse fractiones illas ex natura divisionis omnino patet. At si

divisione instituta, ad unitatem tandem ultimum residuum preveniatur, jam nulla est mensura communis præter unitatem. Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus; hoc solum observandum est, nempe quantitates residuas per earum simplices divisores esse dividendas, & quantitates secundum ejusdem litteræ dignitatem semper esse ordinandas. Invenienda sit maxima communis mensura quantitatum $a^2 - b^2$, & $a^2 - 2ab + b^2$. Dividatur $a^2 - 2ab + b^2$ per $a^2 - b^2$, residuum fit $- 2ab + 2b^2$, quod dividatur per $- 2b$ ut reducatur ad $a - b$. Iterum dividatur $a^2 - b^2$ per $a - b$; divisio accurate succedit, ac proinde maximus divisor communis est $a - b$.

Tota hujus operationis ratio pendet ex hoc divisionis principio; si nempe quantitas aliqua metiatur & divisorem & residuum, metiri quoque debet ipsum dividendum; est enim dividendus æqualis producto ex divisore in quotum & ipsi residuo simul. Ita in exemplo præcedenti, $a - b$, metitur divisorem $a^2 - b^2$ atque etiam residuum $- 2ab + 2b^2$; quare metiri etiam debet summam $a^2 - 2ab + b^2$.

Porro quamvis in numeris & quantitatibus litteralibus eadem sit operatio, ut tamen divisor per residuum possit dividi, sæpe oportet primos terminos ita præparare ut alter per alterum accurate dividi possit sine fractione. Id autem fit observando in novi divisoris termino primo quantitates quæ non habentur in primo termino dividendi; si autem per eas dividi potest totus divisor, is totus dividatur; sin minus, multiplicetur totus dividendus per illas quantitates quæ non occurrunt in dividendo, atque ita faciendum in tota operationis serie, si necesse sit. Ita in præcedenti exemplo

emplo, ubi perventum eſt ad reſiduum — $2ab + 2b^2$, reſiduum illud dividi præſcripſimus per, b. Hæc autem præſcripta præparatio tota pendet ex hoc principio; nempe quantitates duæ A, B, communem retinebunt maximum diviſorem, ſi multiplicetur vel dividatur quantitas alterutra puta A, per quantitatem quæ nullum cum quantitate B, communem diviſorem habeat. Illud autem principium ex ipſa diviſoris communis notione eſt omnino evidens.

VI. De fractionum communi diviſore unum addendum eſt quod deinde utilitatis maximæ futurum eſt. Si numeri duo *primi* fuerint, aut eorum alteruter dumtaxat *primus* fuerit, evidens eſt ex ipſa numerorum primorum definitione & ex communium diviſorum regula, numeros illos nullum, præter unitatem, diviſorem communem habere. Quare fractio ex duobus numeris primis compoſita, puta $\frac{a}{b}$, ad ſimpliciores terminos reduci non poteſt. Ergo productum, ac, ex duobus numeris primis ab ipſo, b, diverſis, non poteſt accurate dividi per b. Nam ponatur $\frac{ac}{b} = m$, erit $\frac{a}{b} = \frac{m}{c}$; quod fieri non poteſt; oporteret enim b & c, habere diviſorem communem, quod eſt contra hypotheſim. Eodem modo demonſtrabitur fractionem $\frac{ac}{b}$ ad ſimpliciores terminos deprimi non poſſe; nam foret $\frac{ac}{b} = \frac{m}{g}$, & g haberet diviſorem communem cum, b. Similiter oſtendetur fractionem $\frac{ac}{bd}$, in qua, d, eſt numerus primus ad ſimpliciorem expreſſionem reduci non

non posse; foret enim $\frac{ac}{bd} = \frac{mh}{gh}$, ac proinde, bd, productum ex duobus numeris primis æquale foret producto ex duobus aliis numeris, g, h, ideoque $\frac{b}{g} = \frac{h}{d}$; cum tamen b, ex una parte &, g, ex altera sint numeri primi; quod fieri non posse evidens est ex demonstratis; fractio enim quælibet in qua alteruter terminus est numerus primus, ad simpliciores terminos redigi non potest. Simili ratione demonstrabitur ultra redigi non posse fractionem $\frac{abc}{bd}$ in qua, c, est numerus primus; & generatim productum ex numeris primis quibuscumque divisum per productum ex aliis quibuscumque numeris itidem primis, ad simpliciores terminos reduci non potest. Quare si $\frac{a}{b}$ sit fractio ad minimos terminos reducta, erunt quoque $\frac{aa}{bb}$, $\frac{a^3}{b^3}$, & generatim $\frac{a^n}{q^n}$, fractiones ad simplicissimos terminos redactæ, ac proinde fractio quælibet sive pura, sive mixta, ad potentiam quamlibet evecta, semper manet fractio.

Scol. Præter fractiones in hoc capite explicatas, considerari etiam debent fractiones quæ *decimales* appellantur. Illæ scilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot sequentibus cyphris quot sunt numeri in numeratore; atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator dumtaxat cujus numeris præfixa est virgula, alii punctum præfigunt, quod fit ut numerator a numeris integris distinguatur. Ita ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{10}$ scribi solet 19, 4. Ad exprimendam

dam fractionem $19\frac{4}{100}$ scribitur 19, 04; cyphra numero 4 præfixa indicat denominatorem esse 100. Fractio $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004.
Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios & ita deinceps per decadas semper progrediendo; sic 4, 217 $= 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas maxima est ad obtinendum quotum proxime verum, si divisio accurate fieri non possit. E. G. Si dividendus proponatur numerus, 147475 per 362, quotus invenitur 407, cum residuo 141 cui addatur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3, cum novo residuo 324, cui iterum addatur 0, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344 cui addatur, 0, in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182 iterum dividi posset, sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori, 3, addatur, 0, dividaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2 cui addatur 0, rursusque 20 per 4 dividatur quotus est 5, sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0, 75$. Et requidem ipsa, cum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ ejusdem numeri 100. Hinc generatim patet quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit; multiplicetur nempe numerator fractionis datæ per 100, vel 1000 &c., productum illud divisum per denominatorem erit numerator fractionis deci-

ma-

malis cujus denominator est 100, vel 1000 &c. Sæpe tamen contingit fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcumque cyphræ addantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perveniamus, vel si iidem numeri eodem ordine redeant. Ita si fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, invenies 0, 571428571428571428 &c. nec unquam pervenies ad divisionem accuratam. Pari modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decimalem, invenies 0, 416666 &c. In his autem casibus duas vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquæ autem negliguntur. Ita poni possunt $\frac{4}{7} = 0,57$, & $\frac{5}{12} = 0,417$.

Hæc quidem pauca satis esse possent iis qui demonstrationis severitatem non quærunt; sed rem utilissimam generatim & omnino accurate ostendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem $\frac{r}{10^n}$, in qua n, exprimit cyphrarum numerum, ponaturque, r, numerus integer & $r = \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed est $10^n = 2^n, 5^n$; non potest autem $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$ abire in numerum integrum, nisi, q, æqualis sit alicui potestati ipsius, 2, vel 5 vel 2×5, vel tamdem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potestatem ipsius 5, quæ tamen potestates sunt minores quam, n; ponitur enim fractionem $\frac{p}{q}$ esse ad minimos terminos reductam, hoc est,

p, &,

p, &, q, nullum habere divisorem communem. In alio quolibet casu fractio $\frac{p \times 10_n}{q}$ numquam fieri poterit numerus integer r. Attamen quo major erit, n, hoc est, quo plures erunt cyphræ in denominatore, eo magis fractio $\frac{r}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim $p \times 10^n$ per, q, dividatur, quotus inventus, r qui minor erit, justo major fiet si unitate augeatur. Quare $\frac{r}{10^n}$ minor est quam $\frac{p}{q}$, & $\frac{r \times 1}{10^n}$, major.

Quatuor Arithmeticæ operationes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulæ qua fractiones ab integris dirimuntur. Hæc virgula in eadem linea verticali jacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt vel ab invicem subtrahendæ. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, ut totidem post se notas relinquat quot erant in utraque fractione; tandem si divisio peragitur, dividendi numeri decimales notæ probe observandæ sunt; nam in quoto & divisore simul totidem esse debent post virgulam notæ quot erant in dividendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.	Subtractio.
23, 304	49, 638
3, 9567	17, 16
149, 86	32, 478
177, 120 7	

Multiplicatio.	Divisio.
12, 35	8, 445 / 3, 22 = 2, 6.
4, 2	6, 44
24 70	2005
49 40	1932
32, 478	73

Unum autem in divisione notandum est; Si nempe in divisore plures occurrant notæ decimales quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adjunges quot volueris cyphras, ita ut tamen notæ decimales in dividendo plures sint quam in divisore, ut nempe in quoto aliquæ decimales notæ haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis præcedentis $8, 445 = \frac{8445}{1000}$ & $3, 22 = \frac{322}{100}$, Itaque dividi debet fractio prior per secundam; evidens autem est cyphram unam dumtaxat in quoto adesse, & hinc facile intelligitur cyphrarum numerum in quoto esse semper æqualem cyphrarum in divisore & dividendo differentiæ. In aliis tribus regulis facilius patet operandi ratio.

CA-

CAPUT V.

De radicum extractione.

I. EXplicavimus jam in capite 2° quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicujus *potestas prima*, vel *primus gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius, a, est a. Productum ex quantitate aliqua in seipsam dicitur *potestas secunda*, vel etiam *quadratum*, ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix* quæ vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia* vel *cubus*, ita a^3 est cubus ipsius a; quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim si quantitas evehatur ad potestatem cujus index est, n, habebitur potestas gradus, n. In hoc autem capite præsertim considerabimus radicum quadratæ & cubicæ extractionem; quod ut clare fiat ipsam quadrati & cubi formationem primum investigabimus, atque deinde ad operationes Arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis, $a+b$, ad quadratum evehenda, prodit $a^2+2ab+bb$. Jam vero quadrati hujus formationem, seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a+b$ continet 1°. Quadratum, aa, primæ partis, a. 2°. Productum 2 ab, ex duplo primæ partis in secundam. 3°. Quadratum partis secundæ nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a+b+c$ per $a+b+c$, orietur quadratum $a^2+2ab+b^2+\overline{2a+2b}\times c+c^2$. In hoc quadrato rursus considerandæ sunt partes singulæ; continet 1°. Quadratum $a^2+2ab+b^2$ ex duobus primis terminis $a+b$. 2°. Productum

ductum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a + 2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2, tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus quam tribus terminis composita; tales vero quantitates magis compositæ appellari solent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a + b$ ad 3^{am} potestatem evehatur, multiplicetur nempe quadratum $a^2 + 2ab + b^2$, per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Cubi hujus partes singulæ sunt 1°. Cubus primi termini, nempe a^3. 2°. Productum ex quadrato a^2 primi termini in triplum terminum secundum, scilicet $3a^2b$. 3°. Productum ex primo termino, a, in triplum quadratum secundi termini, nempe $3ab^2$. 4°. Cubus secundi termini scilicet b^3.

Simili modo operandum est pro trinomio $a + b + c$ invenieturque cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. In hoc autem cubo præter duorum primorum terminorum cubum nempe $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, diligenter considerari debent aliæ partes. 1°. Productum ex triplo quadrato duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempe $3a^2c + 6abc + 3b^2c = \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3 \times c$. 2°. Tripla summa duorum primorum terminorum per tertii termini quadratum multiplicata, scilicet $3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a + b} \times 3 \times c^2$. 3°. Tandem tertii termini cubus, nempe c^3.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio, sive radicum extractio. Sit quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi

ter-

termini radix quadrata, x, cujus quadrato subtracto remanent termini duo $ax + \frac{1}{4}a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x per quod dividatur secundus terminus $-ax$, quotus fit $-\frac{1}{2}a$, qui multiplicetur per, x. Tandem fiat quadratum quoti $-\frac{1}{2}a$, atque producta illa ex residuo $-ax + \frac{1}{4}a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x - \frac{1}{2}a$. Tota operatio patet ex numero præcedenti. En typus calculi.

$$\begin{array}{llll} x^2 & -ax & +\frac{1}{4}a^2 & (x-\frac{1}{2}a \\ x^2 & & & \\ \hline 2x-\frac{1}{2}a) & -ax & +\frac{1}{4}a^2 & \\ x-\frac{1}{2}a) & -ax & +\frac{1}{4}a^2 & \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

Cæterum si radix plures habuerit quam duos terminos, jam duo primi termini post primam operationem velut unicus terminus considerari debent, & reliqua peragenda ut ante, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c^3 - 3cy + 3cy^2 - y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica quæ est c, cujus cubus c^3 auferatur, remanent termini $-3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Jam quia notum est secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini, c, triplum quadratum per quod dividatur secundus terminus $-3c^2y$, prodit quotus $-y$ qui erit secunda pars radicis. Quia vero cubus quilibet continet cubum ex duobus primis terminis radicis, sumatur cubus terminorum $c - y$, deinde a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet, ac proinde radix accurata est $c - y$. Totus calculi typus ex præcedenti facile intelligitur.

III. Ex demonstrationibus præcedentibus facile patet radicum extractio in quantitatibus numericis.

Ex-

Extrahenda ſit radix quadrata ut in præſenti exemplo. Numerum datum in claſſes divide quarum ſingulæ duas notas contineant, initio a poſtremis facto ; nihil autem refert ſive unica tantum nota conſtet prima claſſis ſive notis duabus. Quære radicem veram aut proxime veram numeri 38. quæ in noſtro caſu eſt 6. Scribe, 6, loco radicis & ejus quadratum 36 aufer ex 38. Reſiduo 2 adjunge notas claſſis proxime ſequentis, & hujus novi numeri poſtrema nota neglecta, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ ſive 12 contineatur in 29, invenietur, 2, ſcribe ergo 2 in radice, & ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50 ; huic autem reſiduo adnecte notas claſſis proxime ſequentis. Rurſus contempta novi numeri poſtrema nota, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ ſcilicet 124 contineatur in 508, quotus erit 4, iterumque ex numero ſuperiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, reſiduum eſt 113. Quare radix proxime vera numeri propoſiti eſt 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus ſi numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non ſit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Reſiduo 113 addantur cyphræ duæ, ut hic factum vides, & habeatur numerus 624 tam-

Exempl.

```
38. 94. 89. ( 624, 09
36
--------
 294
 122
 244
--------
  5089
  1244
  4976
--------
 11300
 12480
     0
--------
 1130000
  124809
 1123281
--------
   6719. &c.
```

tamquam prima pars radicis, cujus duplum sumatur nempe 1248, dividaturque 1130 per 1248, quotus est 0, quare scribe, 0, in radice, & multiplica 12480 per 0, productumque, 0, aufer ex 11300, remanent 11300. Huic residuo iterum addantur cyphræ duæ, sumaturque duplum radicis nempe 12480 per quod dividatur 113000, scribaturque quotus 9 in radice per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residuum fit 6719. Operatio rursus continuari posset, sed satis patet methodus cujus ope radicem proxime veram obtinere licet, & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium natura.

In hujus operationis serie idem notare oportet quod in divisione observatum est; nempe si post adjectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inventæ non contineatur in numero qui per illud dividendus est; postrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra scribenda est in radice, & classis proximæ notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est hanc operationem esse divisioni simillimam in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radicis postremo inventæ auctum nota quæ deinceps investigatur. Hoc unum interest quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; in divisione totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota quæ inquiritur; atque id in causa est cur in hac divisione instituenda, postrema dividendæ quantitatis nota prætereatur. Si contingeret divisorem esse majorem V. G. in præsenti exemplo si productum ex 2, in 122 subtrahi non posset ex 294, jam in radice scribendus esset numerus proxime

minor

minor & tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Unum tamdem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventæ scribatur radix nova & deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præsenti exemplo post duplum primæ radicis 12, scribitur 2, totusque numerus 122, multiplicatur per novam radicem, 2; operationis ratio manifesta est; cum enim numerus, 2, in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicæ extractionem jam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis & iisdem innititur principiis.

Extrahenda sit radix cubica, ut in præsenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas incipiendo a postremis notis, prima classis quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc casu unicam continet. Quæratur radix cubica numeri, 5, proxime minor quæ est 1. Hujus cubus 1, subtrahatur a prima classe, 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut hic factum vides. Deinde ita dicendum, prima pars radicis, 1, pro deca-

Exempl.

```
5. 305. 472. ( 174, 4
1
________
4305
 300
________
2100
1470
343
________
3913
________
392472
 86700
________
346800
  8160
    64
________
355024
________
37448000.
```

de

de haberi debet si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10, quadratum 100, & per illius triplum 300, dividatur 4305 invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret justo major, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea 7 × 7 = 49, & 49 × 10 = 490, postea 490 × 3 = 1470, quod scribe infra 2100. Tandem 7 × 7 × 7 = 343, quod scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470, & 343 & summa 3913. auferatur ex numero 4305, residuum est 392. Demittatur classis tertia 472 & duæ primæ partes radicis velut pars unica considerentur. Hæc autem pars quæ est 17, æquivalet 170 si conferatur cum tertia parte quæsita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700 per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus, 4, quem scribe in radice; multiplicetur divisor 86700 per 4, productum fit 346800 quod infra scribitur. Dicas deinde 4×4 = 16; 16 × 170 × 3 = 8160, quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4 nempe 64. Addantur tres illæ quantitates quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere si residuo addantur tres cyphræ, ut in præsenti exemplo factum est; & eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa; illud autem observandum est diligenter inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratæ & cubicæ, diximus tot esse radicis partes, quot sunt di-

versæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere potest, consideretur numerus, 99, omnium qui duobus constent notis maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10, consideremus, quadratum erit 100, quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quæ tres habeat notas est 100, cujus radix quadrata est 10, quæ proinde duas continet notas; at quantitas omnium maxima, quæ tres habeat notas est 999. Cujus radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur præscripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata, & huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Evidens est extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore, & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione, operationis rite peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice supersedemus ubi veram invenire non licet, & quantitati propositæ præfigitur signum $\surd$ quod *radicale* appel-

pellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$, denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri quos Arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum præfigitur, ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$, significant radicem quadratam ipsius, ab, & radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ $a^{\frac{1}{m}}$ significant radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam, m. Ut autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet quæ antea de exponentibus breviter dicta sunt. Ponamus $a = b^2$, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Præterea in quantitate $(bb)^3$, exponens, 3, indicat quantitatem, bb, ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$, exponens $\frac{1}{2}$ designat litteram, b, dimidio minus sumendam esse quam in bb, ac proinde semel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota magis ac magis illustrabitur, explicatis quatuor Arithmeticæ operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdæ adduntur, vel subtrahuntur facillime, si ejusdem sint exponentis, & eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, sæpissime contingit quantitates surdas ejusdem ordi-

nis ad eamdem quantitatem ſub ſigno radicali poſſe revocari. Ita ſi addi, vel ſubtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & $b\sqrt{75a}$, primá per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1° caſu habebitur $9b\sqrt{3a}$, in altero autem $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo conſiſtit, ut numeri ſub ſigno radicali poſiti quærantur diviſores, inter quos ille eligatur, ſi quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejuſdem ordinis, cujus eſt ſurda quantitas. Si aliquem ejuſmodi diviſorem invenias, ejus radicem præfige ſigno radicali, quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens. Si autem nullus talis diviſor inveniri poſſit, jam quantitates radicales in additione ſigno + connectendæ, in ſubtractione autem ſigno — ſeparandæ.

Demum multiplicantur, & dividuntur quantitates irrationales non ſecus, ac rationales, & producto vel quoto idem, quod prius erat, ſignum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate ſit ejuſdem ordinis. Ita ſi multiplicari debeant $\sqrt{ab}\times\sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita ſi dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$ erit $\dfrac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$. Patet autem in multiplicatione delendum eſſe ſignum radicale, ſi æquales fuerint quantitates ſigno incluſæ; ſic $\sqrt{a^3c}\times\sqrt{a^3c} = a^3c$. Quoniam ſæpe contingit quantitates radicales ad eumdem exponentem reducendas eſſe, obſervandum eſt id facile præſtari poſſe ex ha-

cte-

ctenus demonstratis; ita quantitates duæ radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\frac{a^n}{b^n}}$ & $\sqrt[nm]{\frac{c^n}{d^n}}$; quod patet; nam quantitates illæ ad potestates n, m, respective evehuntur & simul deprimuntur. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem, illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a^3 per a^2 productum fit $a^{3+2} = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem evehi debeat, habetur $a^{3 \times 2} = a^6$, & generatim quantitas a^m ad potestatem, n, evecta fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, potestas autem per multiplicationem. Contraria ratione divisio fit per *exponentis* subtractionem, & radicis extractio per exponentis divisionem. Ita $a^6 = a^{6\ 2} = a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, & generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{mn}$, at pro radicis, n, extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales, sive incommensurabiles sæpe in hoc capite nominavimus, revera autem tales dari quantitates evidens est ex capite præcedenti, in quo demonstravimus fractionem, sive puram, sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer cujus radix quadrata, cubica &c. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde hujus numeri radix est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa, cum per

 nu-

numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero exiſtere neceſſum eſt partem aliquotam, quæ ſit utrique quantitati communis; at quantitates inter ſe incommenſurabiles tali carent menſura; ita $\sqrt{2}$ non eſt numerus proprie dictus, talis quantitas proprie non exiſtit, eaque inveniri non poteſt. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri, niſi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{3}{4}$, quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter ſumptam, ipſa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas conſideratur, ut antea obſervavimus. Totam incommenſurabilium doctrinam utiliſſimam quidem, alio arithmetico exemplo illuſtrabimus. Si ex numero, 7, extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$, & major quam 2, cùm ſit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri, 7, continetur intra limites 2 & 3, ac proinde ſi poſſet determinari, ea foret æqualis numero 2, & alicui numero fracto, ſed fieri non poteſt ut fractio mixta per ſeipſam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonſtravimus. Ergo numerus 7, pro radice habere non poteſt neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cujus radix non eſt numerus integer.

Scol. Secundæ dumtaxat, & tertiæ poteſtatis compoſitionem, ac reſolutionem in præſenti capite explicavimus; at rem generatim & breviter quantum licet, pro alia qualibet dignitate conſiderabimus. Ex hactenus explicatis manifeſtum eſt eodem modo formari altiores cujuslibet gradus poteſtates. Ita ad formandam quarti gradus poteſtatem multiplicari debet cubus

bus per ſuam radicem, & ſic deinceps. Jam in ſingulis terminis exponentes, & coefficientes diligenter obſervemus. In poteſtatis cujuslibet compoſitione, primus terminus, a, binomii cujuslibet, $a + b$, evehitur ad poteſtatem quæſitam V. G. a^2 ſi poteſtas ſecunda fuerit. In aliis ſequentibus terminis exponens quantitatis, a, per unitatem decreſcit, & in ultimo termino evaneſcit. Ita in ſecunda poteſtate habetur $2ab + b^2$. Contra autem poteſtas termini, b, in primo termino non reperitur, ſed in 2°. termino illius exponens eſt unitas, in 3°. termino eſt 2, & ita creſcit per gradus, donec in ultimo termino exponenti poteſtatis quæſitæ æqualis fiat. Quare iiſdem gradibus, quibus decreſcunt exponentes ipſius, a, creſcunt exponentes quantitatis, b, atque in utraque quantitate exponentium ſumma ſemper eadem eſt, & poteſtatis quæſitæ exponenti æqualis; quod quidem in poteſtate qualibet experiri licet. Ita poteſtas 6ª binomii $a + b$, invenitur $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, in qua obſervare eſt exponentes quantitatis, a, decreſcere ſecundum ſeriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine creſcere exponentes quantitatis, b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; ſummaque exponentium in utroque termino eſt ſemper 6. Jam ſupereſt, ut ſingulorum terminorum coefficientes obſervemus. Dividatur coefficiens præcedentis termini per exponentem ipſius, b, in termino dato, & quotum multiplica per exponentem ipſius, a, in eodem termino auctum unitate. Ita in præcedenti exemplo ubi termini ſunt, a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, coefficiens primi termini eſt unitas, coefficiens ſecundi eſt $\frac{1}{1} \times 5 + 1 = 6$, tertii termini co-

efficiens $\frac{6}{2} \times 4 + 1 = 3 \times 5 = 15$. Coefficiens termini quarti est $\frac{15}{3} \times 3 + 1 = 5 \times 4 = 20$. Et simili modo invenientur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium, & coefficientium serie, generatim exhiberi potest binomium $a + b$, ad potestatem quamlibet, m, evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus, a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$ $a^{m-4}b^4$, quæ series continuari debet, donec exponens quantitatis, b, evadat m. Coefficientes autem ex præcedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m \times \frac{m-1}{2}$, $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, $\frac{m \times m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ & ita deinceps. Quare hæc habetur generalis formula $\overline{a+b}^m = a^m + ma^{m-1}b + m \times \frac{m-1}{2} \times a^{m-2}b^2 \times m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^{m-3}b^3$ &c. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{a-b}^m$, hoc solum observato discrimine, quod terminus debeat esse negativus, si exponens quantitatis, b, sit numerus impar. Ita in cubo $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, secundus & quartus termini sunt negativi; ratio autem est evidens, cum negativa existente quantitate multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi posset pro trinomio $a + b + c$, ponendo $a + b = a$, & ita deinceps pro polynomio quolibet. Præcedens formula quæ potestatum compositionem exhibet, earum quoque resolutionem repræsentare potest. Ita radix quadrata binomii, $a + b$, nihil est aliud, quam potestas binomii $a+b$, cujus exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula præcedenti $m = \frac{1}{2}$, ha.

habebiturque $\overline{a+b}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times a^{\frac{1}{2}-1} b + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times a^{-\frac{3}{2}} b^2 +$ &c. $= a^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^2}{8a^{\frac{3}{2}}} +$ &c. Si quantitas ex pluribus quam duobus constet terminis. E. G. si extrahenda sit radix quadrata ex quantitate $1 + 2c + c^2$. Fiat $a = 1$, $b = 2c + c^2$. Eadem adhibita formula, factisque debitis reductionibus per vulgares Algebræ regulas, invenitur radix $1 + c$, ut oportet. Si autem quantitas proposita nullam habeat radicem accuratam, hujus formulæ ope ad radicem proxime veram licet accedere. Exempla duo breviter proponemus. Sit $aa + b$, quadratum imperfectum, ex quo extrahenda sit radix quadrata, habebitur $(aa + b)^{\frac{1}{2}} = aa^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times b \times aa^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}^{-1} \times \frac{b^2 \cdot aa^{\frac{1}{2}-2}}{2}$ &c. $= a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3}$ &c. Simili modo si ex cubo imperfecto $a^3 + b$ extrahenda sit radix cubica, erit $(a^3 + b)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{a}{3a^3} - \frac{b^2}{9a^5}$ &c. Itaque ad radicem proxime veram accedere possumus per series infinitas, dummodo series illæ sint *convergentes*, hoc est, si termini perpetuo decrescant. Sit, n, ordo quem terminus aliquis in præcedenti serie occupat, terminus ille invenietur esse ad terminum proxime sequentem ut 1 ad $\frac{b}{a} \times \frac{m-n+1}{n}$, ac proinde ut series sit convergens, oportet $b \times (m-n+1)$ esse semper minorem quam, na. Ita in exemplo proposito, ad habendam radi-

cem quadratam proxime accuratam, terminus $b \times (\frac{1}{2} - n + 1)$ positive sumptus, minor esse debet quam naa, existente, n, numero integro. Simili modo ad habendam radicem cubicam, quam proxime in exemplo præcedenti, oportet terminum $b \times (\frac{1}{3} - n + 1)$ positive sumptum semper minorem esse, quam na^3; quod quidem diligenter observandum est in præcedentis formulæ usu.

CAPUT VI.

De proportionibus.

I. IN memoriam revocanda est explicata cap. 1°. rationis & proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo*, qua ad se invicem referuntur; *Geometrica* dicitur si in ea relatione consideremus, quomodo quantitas una alteram contineat; *Arithmetica* vocatur, si excessum tantummodo unius supra aliam spectemus. In omni ratione quantitas quæ ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero ad quam refertur, *consequens* appellatur. Ratio *Geometrica* dicitur *dupla*, *tripla*, *decupla* &c. si antecedens bis, ter, decies &c. consequentem continet; contra vero *subdupla*, *subtripla*, *subdecupla* &c., si bis, ter, decies &c. antecedens in consequenti continetur. *Exponens* rationis Geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per consequentem diviso; exponens vero rationis Arithmeticæ est differentia consequentis ab antecedenti. Hinc ratio Geometrica ad instar fractionis scribitur, Arithmetica ad instar subtractionis. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur, *Geometrica* vel *Arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate; igitur in omni proportione quatuor quantitates esse debent, & pri-

& *prima ad secundam esse* dicitur, *ut tertia ad quartam*. Si vero eadem quantitas bis assumatur, ita ut primæ rationis consequens idem sit cum antecedente, proportio dicitur *continua*. Ita exprimi solet proportio Geometrica a. b:: c. d, vel a : b = c : d, vel $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; Arithmetica vero a — b = c — d.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia, quæ inter duas ultimas, jam quantitates illæ sunt *Arithmeticæ proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione; quare Arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, a + b, e, e + b. Si autem talis proportio continuetur, ita ut quantitates per eamdem constantem differentiam perpetuo crescant vel decrescant, jam habetur series vel *progressio Arithmetica*, qualis est ista a, a + b, a + 2b, a + 3b &c., vel hæc alia x, x — b, x — 2b &c. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5, &c., & 10, 4, 1, — 2 — 5 — 8 &c. Ex ipsa proportionis Arithmeticæ natura evidens est summam extremorum terminorum æqualem esse summæ mediorum. Ita in proportione Arithmetica e, a + b, e, e + b, manifestum est summam extremorum a + e + b, æqualem esse summæ mediorum a + b + e. Hinc datis tribus quantitatibus facile invenitur quarta arithmetice proportionalis; addantur scilicet secunda & tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur in progressione qualibet Arithmetica summam duorum extremorum æqualem esse summæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æque distantium. Sint

priores termini, a, a + b, a + 2b &c., sitque ultimus terminus, x, erit penultimus x − b, antepenultimus x − 2b &c. Jam comparentur inter se termini, qui ab extremis æque distant in hunc modum

$$\begin{array}{l} a,\ a + b,\ a + 2b,\ a + 3b,\ a + 4b\ \&c. \\ x,\ x - b,\ x - 2b,\ x - 3b,\ x - 4b\ \&c. \\ \hline a + x,\ a + x,\ a + x,\ a + x,\ a + x\ \&c. \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, & qui ab extremis æqualiter distant, sibi invicem addantur, habebitur semper a + x, hoc est, summa primi termini, a, & ultimi x; atque hinc etiam evidens est summam omnium terminorum in progressione Arithmetica æqualem esse producto ex summa primi, & ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur, n, erit omnium summa $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$.

III. Cum differentia communis terminorum in progressione Arithmetica primum terminum non afficiat, patet hujus differentiæ coefficientem in quolibet dato termino æqualem esse numero terminorum, qui terminum datum præcedunt. Quare in ultimo termino, x, habebitur $\overline{n - 1} \times b$, nempe $x = a + \overline{n - 1} \times b$. Igitur cum omnium terminorum summa sit $\overline{a + x} \times \frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $= \frac{2an + n^2b - nb}{2} = \left(a + \frac{nb - b}{2}\right) \times n$. E. G. Series Arithmetica 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &c. ad 100 terminos producta $= \frac{2 \times 100 + 10000 - 100}{2} = 5050$. At si progressionis primus terminus fuerit, o, erit pro-

progreſſionis ſumma æqualis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc caſu cum ſit $a = o$, ſumma terminorum, quæ generatim exprimitur per $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{nx}{2}$. Unde evidens eſt ſummam numeri, cujuslibet terminorum in progreſſione Arithmetica, cujus primus terminus eſt, o, æqualem eſſe dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progreſſio Arithmetica

$$\frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 9+9+9+9+9+9+9+9+9+ =}{2}$$

$$\frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus æqualis ſit quoto ex duabus ultimis, quatuor illæ quantitates ſunt *Geometrice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales ſunt numeri 2, 6, 4, 12, & quantitates a, ar, b, br. Ex ipſa proportionis Geometricæ natura evidens eſt productum ex terminis extremis æquale eſſe producto ex mediis; ſic $a \times br = ar \times b$, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus Geometrice proportionalis, multiplicando ſcilicet duos medios terminos, productumque dividendo per primum, quotus erit quartus terminus quæſitus; ita datis tribus quantitatibus, a, ar, br, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{a} = b$. At ſi proportio ſit continua, ita ut ſecunda quantitas ſit primæ rationis conſequens, & ſimul ſecundæ rationis antecedens, ſimili ratiocinatione patet ſumendum eſſe hujus quantitatis quadratum, illud-

que

que per primam quantitatem esse dividendum. Hæc autem quantitas, quæ antecedentis & consequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, talisque proportio ita exprimi solet ∺ a. b. c, nempe hoc scribendi modo significatur, b, esse mediam proportionalem. At media proportionalis Arithmetica ita designatur ∸ a, b. c. Patet autem in hac proportione summam extremorum æqualem esse termino medio bis sumpto.

Ex demonstratis de proportione Geometrica pendet vulgatissima Arithmeticæ operatio, quæ *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari solet; per hanc regulam datis tribus terminis invenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem consideranda est quantitas, quæ est ejusdem generis cum quantitate quæsita. Ex quæstionis natura intelligitur, an quantitas data sit major, vel minor quantitate quæsita; si major sit, jam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet; at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dextram collocari debet. Constituto autem convenienti terminorum ordine; jam ex præscripto regulæ, productum ex secundo termino in tertium, per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Hæc proponatur quæstio. Si triginta operarii dierum 12 spatio opus aliquod absolvant, quæritur necessarius operariorum numerus, ut idem opus 18 diebus absolvatur. Quoniam quæritur operariorum numerus, primum considerandus est numerus 30; statim autem vides numerum illum

lum datum majorem esse numero quæsito; quare numerus 18 ad sinistram collocari debet, numerus autem 12 ad dexteram, atque ita operatio peragitur, hoc ordine

$$18 : 30 = 12 : \frac{30 \times 12}{18} = 20.$$

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione Geometrica, diversa ab Arithmeticis inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione, aliæ omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum, ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo*. Si summa terminorum primi, & secundi refertur ad secundum, ut summa terminorum tertii & quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, si terminorum primi & secundi differentia ad secundum referatur, ut differentia tertii & quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum æquale semper inveniatur producto mediorum. Ex eadem productorum æqualitate facile colligitur, rationum compositione proportionem non mutari. Ratio *composita* ex pluribus Geometricis rationibus illa dicitur, quam habet productum ex earum antecedentibus ad productum ex consequentibus. Sint duæ proportiones $a : b = c : d$, erit $af : bg = cm : ds$. $f : g = m : s$

Etenim productum extremorum $afds$ æquale est producto mediorum $bgcm$. Et quidem $a : b = c : d$, ac proinde $ad = bc$. Præterea $f : g = m : s$, ideoque $fs = gm$, ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$; Atque

eadem

eadem valet demonſtratio pro alio quolibet proportionum numero ; ratio ex duabus æqualibus compoſita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* &c. Hinc ratio Geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, eſt duplicata ejus, quam habent ipſæ quantitates ad invicem, ratio cuborum triplicata &c. Et contra ratio quam habent inter ſe radices quadratæ, cubicæ &c. dicitur *ſubduplicata*, *ſubtriplicata* &c. rationis potentiarum *reſpectivarum*. At ratio quæ intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc eſt, ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *ſeſquiplicata*.

Si duæ quantitates ita inter ſe connexæ ſint ut ſi una dupla, tripla &c., altera etiam dupla, tripla &c. evadat, prima dicitur eſſe in *ratione directa ſimplici* alterius. At ſi prima in eadem ratione decreſcit, in qua altera augetur, tunc illa eſſe dicitur in *ratione inverſa*, ſive *reciproca* iſtius. At ſi duæ quantitates ita ſint invicem connexæ, ut altera creſcat in eadem ratione, qua primæ quadratum, aut cubus &c. tunc illa ad hanc eſſe dicetur in ratione duplicata, triplicata &c. At ſi in eadem ratione una decreſcit, qua creſcunt alterius quadrata vel cubi, dicetur eſſe in ratione hujus *reciproca* duplicata, aut triplicata &c. Harum rationum frequentiſſimus uſus recurret in Phyſica.

VI. Ex mediorum & extremorum producto pendet etiam univerſa progreſſionum geometricarum doctrina. In progreſſione qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum ſemper æquale eſt producto ex ſecundo & penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo & ultimo æqualiter diſtantibus. Sit progreſſio a, ar, ar^2, ar^3, in qua communis multiplicator aut diviſor *ra-*

tio

tio communis dici solet, sitque, y, ultimus terminus, erunt quatuor ultimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$, ut patet ex natura progressionis geometricæ. Est autem $a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3}$ &c. Præterea summa progressionis geometricæ, dempto primo termino, æqualis est summæ omnium terminorum, dempto ultimo per communem rationem multiplicato. Nam $ar + ar^2 + ar^3 +$ &c. $+\frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r} + y = r \times a + ar + ar^2$ &c. $+ \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r}$. Quare si progressionis summa dicatur s erit $s - a = s - y \times r$, hoc est, $s - a = sr - yr$, vel $sr - s = yr - a$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1}$. Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur, res tamen magis fiet manifesta ex appendice quam de æquationibus mox adjungemus. Porro cum exponens ipsius, r, ab ipso secundo termino perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur, n, erit $n - 1$ exponens ipsius r, in ultimo termino, ac proinde $y = ar^{n-1}$, & $yr = ar^{n-1+1} = ar^n$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1} = \frac{ar^n\ a}{r - 1}$. Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero & communi ratione, facile invenietur omnium terminorum summa. Si inve-

invenienda sit summa serici decrescentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3}$ &c. $+ ar^3 + ar^2 + ar + a$, posito terminorum numero infinito, ultimus terminus, a, fit $= 0$. Cum enim, n, sit infinitus ac proinde & infinitus r^{n-1}, erit $a = \frac{r}{r^{n-1}} = 0$. Quare summa talis serici $s = \frac{yr}{r-1}$, quæ est summa finita, quamvis numerus terminorum sit infinitus; ita series infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ &c. $= 2$.

Scol. Ad progressiones arithmeticas & geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximæ quidem utilitatis in Physica sublimiori, sed rem breviter attingere nobis satis erit. Progressio quælibet geometrica hac formula potest repræsentari ∺ aq^0. aq^1. aq^2. aq^3. aq^4. aq^5. &c. in qua, a, &, q, exprimunt numeros quoslibet. Quare si fiat $a = 1$, præcedens series abit in hanc ∺ q^0. q^1. q^2. q^3. q^4. q^5. &c. Inde autem duo colliguntur, 1°. Productum ex duobus quibuscumque hujus progressionis terminis, pro exponente habet ipsorum exponentium summam. Ita productum ex $q^2 \times q^5 = q^7$. Quare si inveniendus proponatur in hac progressione terminus qui sit duorum aliorum producto æqualis, quæratur terminus cujus exponens est ipsa duorum exponentium summa.... 2°. Quotus ex duobus terminis emergens, ipse est terminus cujus exponens est ipsa exponentium differentia. Ita si dividatur q^5 per q^3, quotus est q^{5-3}. Quare si inveniendus proponatur terminus, duorum aliorum quoto æqualis, quæratur terminus cujus exponens æqualis est exponentium differentiæ.

Numeri alicujus *Logarithmus* appellatur expo-

ponens potestatis numeri denarii qui sit numero dato æqualis. Ita si habeatur progressio geometrica ∺ 10^0. 10^1. 10^2. 10^3. 10^4 &c., & infra scribantur eorumdem terminorum valores ∺ 1. 10. 100. 1000. 10000 &c., exponens 0, est logarithmus unitatis, exponens, 1, est logarithmus numeri 10 & ita deinceps. Sed quia exponentes illi exhibent duntaxat logarithmos numerorum integrorum in progressione decupla 1, 10, 100, 1000 &c., necessum est præterea haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 &c.; quare exponentibus præcedentibus additæ fuerunt decimales septem hoc modo. ∺ $10^{0\ 0000000}$. $10^{1\ 0000000}$. $10^{2\ 0000000}$, $10^{3\ 0000000}$ &c. Jam vero quia exponentes illi semper sunt in progressione arithmetica, ex dictis evidens est valores numeri denarii ad illas potestates evecti quarum indices sunt iidem exponentes, perpetuo manere in progressione geometrica, atque eosdem exponentes esse horum numerorum logarithmos. Quare si continuo augeantur decimales illæ fractione $\frac{1}{10000000}$ vel, quod idem est, si inter singulos primæ progressionis exponentes inserantur termini medii arithmetice proportionales 999999999, habetur nova progressio geometrica hoc modo ∺ $10^{0.0000000}$. $10^{0.0000001}$. $10^{0.0000002}$. $10^{0.0000003}$ &c. in qua quidem progressione observandum est numeros lentissime crescere, cum 1us terminus sit 1, & 10000000$1^{us}$ sit 10. Erit ergo terminus aliquis intermedius = 2, vel 3 vel 4 &c. Ita, 2, inventus est = termino

mino $10^{0.301030}$; $3 = 10^{0.4771213}$; $4 = 10^{0.6020600}$. Quare exponentes illi ſunt logarithmi numerorum 2, 3, 4 &c. Ex his principiis pendent vulgarium logarithmorum tabulæ ab, 1, uſque ad 100000; hæ autem majoribus numeris inveniendis inſerviunt. Aliquæ accuratiores tabulæ logarithmos exhibent ex decem imo & quindecim decimalibus conſtantes; ſed ut plurimum ſeptem ſufficiunt, atque etiam quinque primæ decimales duntaxat aliquando adhiberi ſolent. Ex hactenus demonſtratis & ex logarithmorum tabulis evidens eſt logarithmos numerorum inter 1 & 10 incipere a, 0; logarithmos numerorum inter 10 & 100 incipere ab 1, logarithmos numerorum inter 100 & 1000 incipere a, 2; & ita deinceps. Primus ille terminus qui eſt integer numerus exponentis dici ſolet logarithmi *caracteriſtica*, quo nomine appellatus fuit, quia indicat quot notas contineat numerus dato logarithmo reſpondens. Manifeſtum enim eſt numerum illum tot notas continere quot unitates habet caracteriſtica unitate auctas. Ita logarithmo 4, 8145605 reſpondet numerus quinque conſtans notis, cum caracteriſtica ſit 4.

Commodiſſimæ ſane ſunt logarithmorum tabulæ; Etenim cum demonſtratum ſit productum ex duobus numeris logarithmorum ſummæ reſpondere, eorum vero differentiæ reſpondere numerorum quotum, per ſolam additionem & ſubtractionem compendioſe abſolvi poſſunt multiplicatio & diviſio. Sumantur datorum numerorum logarithmi ſimulque addantur, numerus ſummæ reſpondens in logarithmorum tabulis erit producti logarithmus; contra autem

tem

tem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti, ac proinde inveniuntur numeri quæsiti. Simili ratione patet numerum quemlibet ad datam potestatem evehi, si toties sumatur numeri dati logarithmus, quoties per seipsum numerus multiplicandus proponitur, hoc est, logarithmus per exponentem potestatis multiplicari debet, & productum erit quæsiti numeri logarithmus; contra autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur, quotus erit quæsitæ radicis logarithmus. Quamvis autem eam duntaxat explicaverim logarithmorum formam in qua logarithmus unitatis constituitur, o, multipliciter tamen variari possunt logarithmi. Etenim si duæ sint progressiones quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, & sub singulis primæ terminis singuli secundæ scribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum logarithmi. Sic termini progressionis inferioris sunt logarithmi superioris

$\frac{1}{16} . \frac{1}{8} . \frac{1}{4} . \frac{1}{2} . 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32$. &c.
$-4 . -2 . 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14$ &c.

Semel autem constituta progressione geometrica cum suis logarithmis, utramque seriem licebit interjectis quotcumque terminis augere; Si inter duos quoslibet progressionis geometricæ terminos medium geometrice proportionale, & inter duos eorum logarithmos medium arithmetice proportionale constituas. Sic inter 2 & 4 medium proportionale est $\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2.289$ &c., cujus logarithmus est $\frac{6+8}{2} = 7$. Et eadem methodo semper inveniri poterunt infiniti alii logarithmi numerorum qui vel integri sint, vel ex integris & fractis compositi, medios terminos

nos inter duos proximos ſemper inquirendo. Aliud exemplum in vulgaribus logarithmorum tabulis proponemus. Ut haberetur Log. 9. quæſitus eſt medius proportionalis inter 1 & 10, ſive inter 1. 0000000 & 10. 0000000, extrahendo ex 10. 0 &c. radicem quadratam veræ proximam 3. 1622777, cujus logarithmus eſt dimidius Log. 10. Et iſte quidem numerus major eſt aliquanto quam 3, ſed longe diſtat a 9. Itaque inter eum & 10. 0 &c. iterum quæſitus eſt medius proportionalis extrahendo radicem numeri qui oritur ducendo 10. 00 &c. in 3. 16 &c. & inventa eſt radix veræ quam proxima 5. 6234132. Hic numerus paulo major eſt quam 5 & ejus logarithmus habetur ſi ſumma logarithmorum 10. 00 &c. & 3. 16 &c. bifariam dividatur. Sic continua inveſtigatione mediorum proportionalium inter duos numeros qui ſint proxime majores vel minores quam 9, devenitur tandem ad numerum qui ne una quidem millioneſima differat a 9, ejuſque logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio & patientiſſimo multorum annorum labore ſupputatæ ſunt logarithmorum tabulæ. Cæterum in tabulis ſupputandis neceſſe non eſt eam quam demonſtravimus, methodum adhibere niſi in numeris qui dicuntur *primi*. Nam in numeris qui ex aliorum multiplicatione producuntur, ſatis eſt logarithmos coefficientium addere, ut habeatur logarithmus producti. Sic Log. 15 = L. 3 + L. 5 & Log. 27 = Log. 3 + Log. 9.

A P-

APPENDIX

De Æquationibus.

I. ÆQuatio dicitur propositio duarum quantitatum æqualitatem affirmans, interposito æqualitatis signo $=$. Æquatio valorem quantitatis alicujus repræsentat, si ex una æquationis parte habeatur quantitas sola quæsita, in parte autem altera occurrant quantitates quæ omnes sint cognitæ. Ita si habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni resolvenda æquatione id curandum est, ut nempe quantitas cujus valor quæritur, in una æquationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex duntaxat æquationum genus considerabimus, eas scilicet in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem seu secundum gradum evehitur. Quod primi gradus æquationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus variisque numeris distinguemus .... 1°. Ex una æquationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc exemplo. $5x + 50 = 4x + 56$, $5x - 4x = 56 - 50$ & $x = 6$... 2°. Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut divisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per divisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$ & $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$, erit $x + 20 = 50$, & $x = 50 - 20 = 30$.... 3°

Pro-

Proportio quælibet geometrica converti potest in æquationem, facta extremorum & mediorum multiplicatione. Sit $12\, x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 \cdot x = 2x$; quare $3x = 12$, &, $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in æquationem per additionem mutari potest ..... 4°. Loco quantitatis cujuslibet in æquatione, alia ejusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 2y$ & $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24 \cdot 9}{3} = 5$.....: 5°. Si pars æquationis quantitatem quæsitam continens, signo aliquo radicali afficiatur, delendum est signum radicale, & altera pars æquationis ad eam evehi debet potestatem quam indicat ipsum signum radicale. Sit $\sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = c + d$, & $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$, quare $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 b^2}{a}$.

II. His præmissis permutationum regulis quæ ex antea demonstratis facile intelliguntur, jam problema aliquod unius dimensionis solvendum proponemus. Et primo quidem quæstionis propositæ distincta habeatur notio & singulæ conditiones attente considerentur. Si alicujus problematis conditiones ita exprimantur, ut tot habeantur incognitæ quot æquationes, poterit semper deveniri ad unicam æquationem quæ unicam incognitam habeat. Nam sint, E. G. 10 æquationes & totidem incognitæ, poterit conferendo primam cum secunda eliminari per regulas præscriptas una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem quæ illa careat; tum idem præstari poterit conferendo primam cum tertia, & ita porro, ac habebuntur jam novem

novem æquationes cum novem incognitis, quæ eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis, & ita porro donec perveniatur ad unicam æquationem cum unica incognita. Hinc ſi habeantur tot æquationes quot incognitæ, problema dicitur *determinatum*, & unicam vel finitas numero ſolutiones admittit. Si fuerint plures incognitæ quam æquationes, problema dicitur *indeterminatum* & ſolutiones habet infinitas. Æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 20$; eſt æquatio determinata; ſed $x + y = 12$, eſt indeterminata; etenim ſi ponatur $x = 1$ & $y = 11$ vel $x = 2$, & $y = 10$, & ita porro, ſemper invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti ſint valores qui pro, x & y poſiti numerum datum reſtituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis quos annuatim impendit in ſumptus, & poſt tres annos fit duplo ditior, quæruntur nummi. In hoc problemate plures latent conditiones ſic evolvendæ & enuntiandæ. Quantitates incognitæ ultimis alphabeti litteris deſignari ſolent. Itaque mercator habet certam nummorum ſummam.

	x
Anno primo expendit nummos 100. Ergo.	$x - 100$
Reliquum adauget triente, quare	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
anno ſecundo expendit nummos 100. Ergo.	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$

anno tertio expendit 100.; ergo.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{16x\ 2800}{9} + \frac{16x - 2800}{27} = \frac{64x\ 14800}{27}$
Tandem fit duplo ditior. Ergo.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x.$

Quæstio itaque ad æquationem reducitur, ex qua erui debet x. Utramque æquationis partem multiplica per 27, productum fit $64x - 14800 = 54x$; auferas $54x$, residuum est $10x - 14800 = 0$, seu $10x = 14800$; dividas per 10, habetur $x = 1480$. Quare habentur nummi sub initio & ipsum lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad æquationem quæ ipsum quantitatis incognitæ quadratum, & præterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, hæc æquatio dicitur *secundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem æquationibus hac regula utendum est. Singulos æquationis terminos quæ incognitam quantitatem continent, ad unam partem transferas, ita ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitæ quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem singuli æquationis termini dividantur. Tandem dimidii coefficientis quantitati incognitæ præfixi sumatur quadratum quod ex utraque parte addatur. Jam pars æquationis quæ incognitam quantitatem continet ad perfectum quadratum reducta habebitur, ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, & deinde per regulas præscriptas, quantitatis incognitæ valor eruetur. Ponamus $y^2 + ay = b$, addatur hinc & inde quadratum dimidii

coe-

coefficientis a, erit $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2$, extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$, & tandem $y = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} - \frac{a}{2}$. Diligenter obſervandum eſt radici quadratæ præfixum fuiſſe ſignum $\pm$ hoc eſt, + vel —. Etenim radix quadrata cujuslibet quantitatis ut a^2, poteſt eſſe $+a$, vel $-a$, ideoque $y + \frac{a}{2} = +\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$, vel $-\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$; cum $-\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times -\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$, reſtituat quadratum $b + \frac{a^2}{4}$, non ſecus ac facit $+\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Quare æquationes quadraticæ duas admittunt ſolutiones; Sic in præſenti exemplo duo ſunt valores radicis y, unus nempe $y = +\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = -\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. At quoniam poſitiva ſunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet quantitatis negativæ radicem eſſe impoſſibilem ſeu aſſignari non poſſe, quæ ideo dicitur *imaginaria*. Aliquando contingit æquationes nullam ſolutionem admittere. Exemplo ſit $y^2 - ay + 3a^2 = 0$; erit $y_2 - ay = -3a_2$, & $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a_2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$, extractaque radice habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$ & $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifeſtum eſt duos valores radicis y eſſe imaginarios, cum aſſignari non poſſit radix quantitatis $-\frac{11a^2}{4}$. Si ergo in ſolutione

problematum deveniatur ad quantitates imaginarias, signum est admodum manifestum vel problema esse impossibile, vel adhibitam esse methodum quæ aliquid impossibile involvit, prorsus ut fit in argumentatione dum res ad absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariæ quæ eamdem sub signo radicali quantitatem habent ut $\sqrt{a}$, $-\sqrt{-a}$ per multiplicationem efficere possunt productum reale in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illæ numero pari semper multiplicentur. Etenim evanescere non potest signum radicale, nisi terminus hoc signo affectus multiplicetur per alium terminum qui idem signum radicale habeat & eamdem quantitatem signo inclusam. Jam vero ita sublato signo radicali, si productum ex prima multiplicatione per idem signum radicale multiplicetur, novum productum afficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum evanescet signum radicale, & ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium $x - a - \sqrt{-b}$, evanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud quod a primo differat tantum quoad signum vinculo radicali præfixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex, $x - a - \sqrt{\ b}$ in $x - a + \sqrt{b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$; in hoc enim solo casu producta singula ex unoquoque termino reali in $\sqrt{-b}$, sese mutuo signis contrariis elidunt; atque hinc patet terminum, b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$, esse necessario positivum. Itaque

que quantitatum imaginariarum frequens usus occurrere potest ; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatum quæ ex realibus & imaginariis sunt mixtæ, realis esse potest ; ita quantitatum $3 + \sqrt{-1}$ & $8 - \sqrt{-1}$, summa est realis nimirum 11, atque etiam realis est differentia nempe 5.

V. Æquationes omnes secundi gradus repræsentari solent hac formula $x^2 - px = q$, in qua p & q designant quantitates quaslibet vel positivas vel negativas. Inde autem statim concluditur $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hic autem difficultates aliquæ suboriri possent ex præcedentibus facile explicandæ. Quæri etenim potest cur quantitas positiva $x - \frac{p}{2}$ æqualis fiat negativæ $- \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Requidem vera duo quadrata æqualia præbent æquales radices, sed radices illæ ejusdem signi esse debent. Etenim ex eo quod $4 = 4$, concludi non potest $2 = -2$. Præterea $\frac{p}{2} - x$ tam est radix ipsius $xx - px + \frac{pp}{4}$ quam $x - \frac{p}{2}$. Quare scribendum videretur $\mp x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Has difficultates facile solvemus, si observetur hanc ultimam æquationem in quatuor sequentes resolvi posse, $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $x - \frac{p}{2} = - \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = - \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x =$

$\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Duæ ultimæ æquationes conveniunt omnino cum duabus primis; quare ſatis eſt duplex ſignum $\pm$ in una æquationis generalis parte adhibere, ut fieri ſolet. Præterea æquationis reſolutio hoc modo inſtitui poſſet. Radix quadrata æquationis $xx - px + \frac{pp}{4}$ eſt $x - \frac{p}{2}$, ſi x ſit major quam $\frac{p}{2}$ ſitque $\frac{p}{2} - x$, ſi x ſit minor quam $\frac{p}{2}$. In 1°. caſu habetur $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4}+q}$; in altero autem erit $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Hi ergo ſunt duo caſus diſtincte expreſſi, qui duplici ſigno in formula generali *implicite* & obſcure enuntiantur, hoc modo $x - \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem præcedentem invenitur $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4}+q}$, ſola nempe radix poſitiva; tum vero inutilis eſt radix negativa, cum problematis ſolutionem non præbeat. Hæc tamen radix haberetur quoque, mutata æquatione per regulas explicatas, prodiret nempe $xx - px = q^2$, & $\frac{p}{2} - x$, vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Hac igitur methodo radices poſitivas neceſſarias a ſuperfluis, veras a falſis ſeparare liceret.

Æquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illuſtrabimus. Itaque hoc ſit problema,

ma, invenire ſcilicet in linea duo quæcumque luminaria conjungente punctum tale ut luminaria illa ex hoc puncto æquali luce fulgeant. Diſtantia inter duo luminaria dicatur, a, ſitque illuminationis ratio ut, m, ad, n; præterea dicatur x, diſtantia minoris luminaris a puncto quæſito, erit diſtantia luminaris alterius ab eodem puncto, a − x. Jam ponatur luminarium effectus ſeu lucis intenſitatem eſſe in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a puncto lucido, ut vulgo ſtatuitur a Phyſicis, ſumptis diſtantiarum quadratis, erunt intenſitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx-2ax+aa}$. Res ita ſe haberet ſi æqualia forent luminaria; at quia (ex hypoth.) lucis quantitates abſolutæ ſunt ut m ad n, erunt luminarium effectus ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx-2ax+aa}$. Itaque ut habeatur punctum quæſitum, inſtituenda eſt æquatio inter $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{xx-2ax+aa}$, ex qua, per reductionum regulas, eruitur $xx + \frac{2amx}{n-m} = \frac{aam}{n-m}$, & addito, ut moris eſt, dimidii coefficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$. Hujus æquationis radices duæ ſequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{nm}\sqrt{mn}$, vel $x = \frac{a}{nm} \times -m \pm \sqrt{mn}$. Ex his evidens eſt unius radicis valorem eſſe negativum, alterius autem poſitivum. Etenim ſi quantitas radicalis

 ſigno

ſigno — afficiatur, jam quantitas tota fit negativa; ſi autem afficiatur ſigno poſitivo $+$, jam quantitas $- m + \sqrt{mn}$ erit poſitiva, cum ſit (ex hypoth.) n. major quam m, ideoque $\sqrt{mn}$, major quam m.

Supereſt ut radicis negativæ uſum explicemus. In memoriam revocanda ſunt quæ de quantitatibus negativis jam dicta ſunt, ſcilicet quantitates negativas ſecundum directionem poſitivis oppoſitam ſumendas eſſe. In præſenti problemate quantitatis, x, valor negativus facile intelligetur, ſi obſervemus punctum quæſitum a nobis conſiderari tamquam inter duo luminaria conſtitutum. At ſi attendatur ad alterius caſus poſſibilitatem, ponendo nempe punctum quæſitum in linea producta ultra luminaria, jam valor radicis prodit poſitivus. Et quidem ſi diſtantia puncti a minori luminari dicatur, x, ut ante, erit luminaris majoris diſtantia, $a + x$, quadrata autem diſtantiarum erunt xx & $aa + 2ax + xx$, quæ per conditiones problematis in æquationem reducta præbent $maa + 2am + mxx = nxx$; reſoluta æquatione habetur $x = a \times \frac{m + \sqrt{mn}}{n - m}$, valor $a \times \frac{m + \sqrt{mn}}{n - m}$ erit poſitivus, hicque ſolus problemati ſatisfaciet in caſu propoſito. Alter autem valor negativus $a \times \frac{m - \sqrt{mn}}{n - m}$ ſignificat ſumendam eſſe directionem oppoſitam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, ſed in ipſa linea jungente conſtituendum eſſe. Problema ad caſum particularem transferamus. Ponatur $n = 4m$, præcedens formula $x =$

a

$\frac{a}{n-m}\overline{x - m + \sqrt{mn}}$ in hanc abit $x = \frac{a}{3}\overline{x + 2 - 1}$. Quare duplex valor radicis x erit $+ \frac{1}{3}$ a & $-$ a, qui quidem duo valores determinant puncta duo quæ problemati æque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria illiusque distantia a lumine vividiori duplo major erit quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia æqualis erit ipsi luminarium distantiæ. Facile autem sine ullo algebræ auxilio intelligitur utrumque punctum problemati satisfacere, cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint quam vividiori, quæ vim habet quadruplo majorem. Hoc exemplo illustrantur quæ de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Hæc sunt Arithmeticæ & Algebræ elementa, brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse judicavimus.

F I N I S.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PROŒMIUM.

De definitione & divisione Geometriæ.

I. GEometria est scientia magnitudinum, *solidorum* nempe, *superficierum* & *linearum*. Solidum est magnitudo in longum, latum, & profundum extensa. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum quod tres illas dimensiones simul non habeat, illæ tamen seorsim considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hic intelligitur notio superficiei & lineæ. Superficies est magnitudo tantum in longum & latum extensa. Linea autem est magnitudo extensa tantum in longum. Et requidem ipsa, itineris longitudinem nobis repræsentamus, non attenta ejus latitudine, & planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes. Denique si concipiamus lineæ terminum cujus nulla pars sit, nulla extensio, jam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tyronibus Geometriæ definitionem, id primum ostendi debet quomodo per varios abstractionum gradus ex corporis *physici*, & prout est in se, consideratione ad corporis *Geometrici*, & simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei, & lineæ notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica utuntur, qui statim superficiem definiunt terminum solidi, li-

lineam terminum superficiei, & punctum terminum lineæ. Ex præcedenti definitione nascitur divisio Geometriæ in Geometriam linearum, superficierum & solidorum. Quare tres erunt Geometriæ sectiones. 1ª De lineis. 2ª De superficiebus. 3ª De solidis. In prima sectione linearum positionem, illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cujus utilitas est maxima in consideranda linearum rectarum mutua positione. Quare ad Geometriæ Elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates, & mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum, illorumque mensuram demonstrabimus. At recta methodus postulat ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis capitibus distinguamus.

II. Lineam repræsentare solent Geometræ, tanquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum est ita simplicem esse rectæ & curvæ notionem, ut ad clariorem ideam, magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam. Ceterum inde evidens est datis in linea recta punctis duobus, datam esse hujus lineæ positionem, ita ut unica dumtaxat recta per hæc duo puncta transire possit. Ex his etiam intelligitur quid sit superficies plana omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest. Circulus definitur figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ

peripheria dicitur, five *circumferentia*, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio, quod *centrum* dicitur, ductæ æquales funt inter fe; circumferentiæ pars quælibet *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta, & utrinque terminata, *diameter* dicitur; rectæ autem a centro ad circumferentiam ductæ *femidiametri*, vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillime concipitur. Duæ lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes angulum efficere dicuntur. Angulorum menfura eft arcus, quem ipforum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice, tanquam centro defcripti. Porro dum dicitur anguli menfuram effe arcum circuli, nihil aliud fignificatur, nifi æquales effe angulos, fi æquales fint arcus ex angulorum vertice, & eodem radio defcripti. Ita dum dicitur angulum effe alterius duplum, nihil aliud intelligitur, nifi arcum unum, altero effe duplo majorem. Itaque anguli natura in majori, aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam confiftit. Igitur angulus cum fit mera linearum inclinatio & *apertura*, extenfio vel quantitas proprie loquendo dici non poteft; ac proinde, abftractione facta ab omni extenfionis confideratione, angulum alterius duplum dicere non poffumus, cum id dici poffit dumtaxat de quantitate comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non eft quantitas proprie dicta, atque hinc factum eft, ut anguli menfuram cum circuli arcu comparaverint Geometræ. Circulus dividi folet in partes æquales 360, quæ *gradus* dicuntur; finguli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividimus in 60 fecunda, & fic in infinitum. Gradus per, o, defignari folent, mi-

minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant 35°, 25′ 36″ 42‴, lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

IV. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio. Linea dicitur alteri lineæ *perpendicularis*, quando in ipsam incidens facit angulos hinc & inde æquales, angulus hujusmodi dicitur *rectus*. At si recta una super alteram cadens duos angulos efficiat, ita ut unus sit recto major, alter autem minor, primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*. Si talis sit rectarum positio, ut eamdem semper a se invicem servent distantiam, evidens est nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem, ac proinde in infinitum etiam protractæ non concurrent, seu angulum non efficient, tales lineæ dicuntur *parallelæ*.

V. Ex lineæ rectæ definitione evidens est duas lineas rectas in unico dumtaxat puncto concurrere posse; cum enim omni careant latitudine, communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambæ rectæ, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent Geometræ, & ita exprimi solet: *Duæ lineæ rectæ segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt*. Itaque tres saltem lineæ requiruntur, ut spatium undique claudatur; spatium undique clausum *figura* dicitur. *Triangulum* est figura terminata tribus lineis, quæ ejusdem latera vocantur. Hæc autem latera si fuerint æqualia, triangulum dicitur *æquilaterum*; si duo tantum latera sint æqualia, triangulum vocatur, *isosceles*. Demum si latera omnia fuerint inæqualia, triangulum *scalenum* dicitur. Rursus autem triangulum ratio-

tione angulorum considerari potest; si unum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur, *acutangulum* si omnes habeat angulos acutos, & tandem *obtusangulum* si angulum obtusum habuerint.

VI. Figura quatuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem æqualia sint figuræ latera, & ad angulos rectos juncta, *quadratum* dicitur; at simpliciter rectangulum vocatur, si latera duo opposita reliquis duobus majora sint, manentibus tamen angulis rectis. *Parallelogrammum* appellatur figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti. Si figura quadrilatera sit æquilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur, & *Rhomboides* vocatur si latera opposita, dumtaxat æqualia habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis, quæ jam enumeravimus diversum, *Trapezium* appellatur; sed figura *polygona* dicitur, quæ pluribus quam quatuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, sex, septem &c., figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum* &c. dici solet. Figura autem polygona *regularis* est, quæ æquilatera & æquiangula est.

VII. Axiomata & postulata plurima præmittere solent Geometræ, quæ quidem nos omittimus. Quæ enim est axiomatum de toto & parte utilitas, ut intelligamus dimidiam lineam tota minorem esse? Ecquis statim non videt rectam lineam produci posse, circulum dato intervallo posse describi & reliqua hujusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superpositione* legitur simplicissimum quidem, & in universa Geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione prætermittere nolumus. Dicunt nempe *ea esse æqualia, quæ sibi*

bi

bi mutuo superimposita perfecte congruunt. Principium illud *superpositionis* non ita crasse intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus ac artifex mensuram aliquam datæ longitudini applicat, ut inde veram longitudinem concludat; talis demonstrandi ratio minime foret Geometrica. In eo positum est prædictum principium, ut figuram alteri impositam imaginemur, & deinde concludamus. 1. Ex partium datarum æqualitate, ipsam earumdem partium convenientiam sive *coincidentiam*.....2. Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde & perfectam duarum figurarum æqualitatem & similitudinem. Itaque *superpositionis* principio intelligenda non est dumtaxat mutua figurarum applicatio, sed partis unius alteri parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Unde evidens est idem valere principium ad demonstrandam figurarum inæqualitatem. Ceterum hoc unico principio cum angulorum mensura per arcus circulares conjuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quæ ad elementarem linearum Geometriam pertinent.

SECTIO I.

De Geometria linearum.

CAPUT I.

De lineis rectis quoad mutuam positionem consideratis, nullo tamen spatio, seu nulla figura terminatis.

PROP. I. RECTA QUÆLIBET IN RECTAM CADENS, VEL DUOS ANGULOS EFFICIT RE-

RECTOS, VEL DUOBUS RECTIS ÆQUALES. Etenim recta insistat perpendiculariter ut, GE, vel oblique ut RE (Fig. 1.) In 1. casu patet (ex def.) angulos GEF, GEC, esse rectos. In casu altero, anguli duo CER, ERF, simul sumpti, æquales sunt duobus angulis CEG, GEF, hoc est, duobus rectis.

COR. I. Producta linea RE, in O, simili ratione patet angulos FEO, OEC, duobus rectis æquales esse, ac proinde duæ rectæ sese invicem secantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales. Jam centro, E, describatur circulus, mensura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc est, gradus 360. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiæ, nempe 90°.

COR. II. Rectæ GH, RO, in unam lineam coalescere non possunt, sed efficiunt angulos, GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppositi*. Illos autem angulos æquales esse manifestum est; cum sit dimidium peripheriæ, RFO; æquale dimidio peripheriæ, GFH; sublata autem communi parte, GO, erunt arcus reliqui GR, HO, æquales inter se.

COR. III. Recta, GE, ad alteram, CF, perpendicularis est, si puncta duo quælibet, G, E, a punctis duobus quibuslibet ut, C, F, æqualiter distent, hoc est, si GC = GF, & CE = EF. Etenim puncta duo E, G, non magis inclinant versus, C, quam versus F, ac proinde cum duo puncta lineæ rectæ positionem determinent (ex def.), æqualis est rectæ totius GE, hinc & inde ad rectam, CF, inclinatio, ideoque ob angulos utrinque æquales, recta GE, perpendicularis ad CF. Patet autem puncta C, F, sumi posse pro arbitrio inter CE, & EF.

COR. IV. Ex puncto quolibet, E, in recta,

cta, CF, dato, duci potest ad eamdem rectam perpendicularis GE. Etenim centro E, & dato quolibet æquali intervallo, Ec, Ef, describantur arcus circuli, sese invicem secantes in g, recta per g, & E ducta erit perpendicularis quæsita, ob distantias gc, gf, & Ec, Ef, æquales.

Si punctum, h, extra rectam datum sit, simili ratione ducitur perpendicularis hE. Etenim ex puncto h sumantur æqualia intervalla hc, hf; deinde ex punctis c & f, tanquam centris, & eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in g, ducaturque, hg, hæc erit perpendicularis, ob æquales hc, hf, & gc, gf, distantias. Evidens autem est in utroque casu unicam perpendicularem duci posse. Unica enim est recta transiens per punctum E, vel h, quæ cum recta CF, æquales hinc & inde efficiat angulos. Patet autem lineam perpendicularem esse omnium, quæ ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevissimam; cum recta perpendicularis non magis pendeat ex una parte, quam ex alia, ac proinde, neque ad dexteram declinet, neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est ex puncto dato ad lineam datam, unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta, ef, in duas partes æquales dividenda proponatur. Ex punctis c, f tanquam centris, & eodem radio describantur arcus circuli sese secantes in g; deinde ex iisdem punctis, & sumpto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in h, recta hg, dividet, cf, æqualiter in E, ut patet; cum singula puncta rectæ gh, æqualiter distent a punctis c, f, ac proinde Ec = Ef.

PROP.

PROP. II. Si lineæ AB, DC, ſint parallelæ (Fig. 2.), erit 1. ANGULUS OFD QUI EXTERNUS DICITUR ÆQUALIS ANGULO OGB, QUI INTERNUS ET OPPOSITUS VOCATUR. 2. ÆQUALES ERUNT ANGULI BGF, GFC, QUI DICUNTUR ALTERNI. 3. ANGULI INTERNI, ET AD EANDEM PARTEM POSITI DFG, FGB ÆQUALES ERUNT DUOBUS RECTIS. Cum lineæ parallelæ eodem inter ſe ubique diſtent intervallo (ex def.), ipſo naturæ lumine notum eſt eamdem fore parallelæ utriuſque, BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD, æqualis eſt angulo OGB, quod erat 1um. Præterea cum angulus GFC æquetur angulo DFD, ad verticem oppoſito (cor. 2. prop. 1.) erunt etiam æquales anguli BGF, GFC. Quod erat 2um. Tandem cum anguli OFD, GFD, æquentur duobus rectis (prop. 1.) æquales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB. Quod erat 3um.

Viceverſa ſi angulus OFD, æqualis ſit interno & oppoſito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO, ac proinde rectæ illæ parallelæ ſunt inter ſe. Rurſus ſi æquales ſint anguli alterni BGF, GFC; vel ſi duobus rectis ſimul æquales ſint interni ad eamdem partem poſiti BGF, GFD, angulus externus DFO ſemper æqualis erit angulo interno, & oppoſito BGF, ac proinde rectæ AB, CD, erunt parallelæ. Itaque ex ipſa paralleliſmi notione facile colliguntur tres primariæ parallelarum affectiones neceſſario nexu inter ſe conjunctæ, ita ut ex una qualibet inferre liceat rectas illas eſſe parallelas. Porro in demonſtrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam Geometræ.

COR. I. Si duæ rectæ AB, HK, parallelæ ſint eidem rectæ CD, erunt etiam inter ſe pa-

parallelæ. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO, eadem erit, ac inclinatio rectæ CD, ad eandem.

COR. II. Si per datum punctum, F, ducere oporteat rectam, CD, parallelam rectæ, AB, ex quolibet hujus puncto, G, ducatur recta GFO, & fiat angulus OFD, æqualis angulo OGB, descriptis nempe ex punctis O, F, tanquam centris & eodem radio arcubus æqualibus FM, GN, erit recta FD, parallela ipsi AB.

CAPUT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

PROP. I. DUCTA RECTA, FM, AD CIRCUMFERENTIAM UTRINQUE TERMINATA, QUÆ CORDA DICITUR (Fig. 3.), RECTA EX CENTRO CIRCULI AD CORDAM PERPENDICULARITER DUCTA, EANDEM SECAT IN DUAS PARTES ÆQUALES. Cum enim recta EP, e centro ducatur, punctum E, æqualiter distat a punctis extremis cordæ F, M, (ex defin. circ.). Præterea cum recta EP, sit perpendicularis ad cordam, singula alia puncta æqualem habent ab iisdem extremis distantiam (cor. 3. prop. 1.). Quare punctum, P, æqualiter etiam distat a punctis, F, M.

Et viceversa recta quælibet EP, per centrum transiens, & cordam æqualiter dividens, eam quoque perpendiculariter secat. Etenim cum recta EP, cordam dividat æqualiter, punctum P, æqualiter distat ab extremis F, M. Quia vero recta EP, transit etiam per centrum, punctum E, æqualiter distat ab extremis F, M. Quare puncta, P, E æqualiter di-

distant a punctis F, M, ac proinde EP perpendicularis est ad FM.

Rursus si recta EP, perpendicularis sit ad cordam, eamque æqualiter dividat, recta illa transit per centrum. Cum enim cordam dividat æqualiter, punctum, P, æqualiter distat ab extremis F, M. Præterea cum sit perpendicularis, singula illa puncta æqualiter etiam distant a punctis F, M. Erit ergo centrum, E, hujus perpendicularis punctum aliquod.

PROP. II. SI RECTA EH TRANSIENS PER CENTRUM DIVIDAT ÆQUALITER CORDAM FM, ÆQUALITER QUOQUE DIVIDET ARCUM FHM. Etenim cum singula puncta rectæ, EH, æqualiter distent a punctis F, M, æqualis erit puncti, H, ab extremis F, M, distantia. Quare si semicirculus GMH, semicirculo GFH, imponatur, congruet punctum M, cum puncto, F, & ob punctum, H, commune, congruent & cordæ HM, FH, & arcus iisdem cordis subtensi.

COR. I. In eodem circulo, vel in circulis æqualibus, cordæ æquales æqualibus arcubus respondent, inæquales autem arcubus inæqualibus. Præterea cordæ æquales, æqualiter distant a centro, cordæ autem inæquales distant inæqualiter; quod evidens est ex *superimpositionis* principio. Nam corda æqualis cum æquali corda semper congruet, nec cum corda inæquali congruere unquam poterit.

COR. II. In eodem semicirculo, vel in semicirculis æqualibus, quo majores sunt vel minores arcus, eo majores vel minores sunt cordæ, & centro magis vel minus proximæ. Viceversa quo majores sunt, vel minores cordæ, centro magis vel minus proximæ, eo etiam majores sunt, vel minores arcus subtensi.

COR.

COR. III. Ducta corda, FM, diametro, AB, parallela intercipit æquales arcus AF, BM. Etenim, cæteris manentibus ut ante, arcus, AH = arcui BH, & arcus FH = arcui HM, quare demptis arcubus æqualibus remanet AF = BM. Evidens est eamdem esse demonstrationem, si parallela, NQ, ad oppositas diametri partes jaceat, erit nempe arcus FN = arcui MQ.

COR. IV. Si ponatur rectam, NQ, motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N, Q, coeant in G, corda NQ, abit in *tangentem* quæ nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est in hoc etiam casu esse GN = GQ.

COR. V. Ex corollariis præcedentibus patet qua ratione per tria data puncta circulus describi possit, dummodo tamen puncta illa in eadem recta non jaceant. Agantur rectæ duæ quæ jungant tria puncta data, hæ erunt cordæ circuli quæsiti. Quare ductis perpendicularibus quæ cordas dividant æqualiter, utraque perpendicularis transit per centrum, quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. Simili ratione dato circuli arcu centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datus in duos æquales arcus dividi potest. Ducatur corda arcum datum subtendens, hæcque æqualiter per rectam perpendicularem dividatur, eadem perpendicularis etiam angulum quem arcus metitur æqualiter in duas partes dividet.

SCHOL. Ex hoc corollario patet facile dividi posse angulum quemlibet in partes, 2, 4, 8, 16, 32 & ita deinceps secundum terminos progressionis geometricæ duplæ; sed, per Geometriam elementarem angulus in tres partes

æqua-

æquales dividi non poteſt, atque hæc eſt anguli *triſectio* a Geometris per *circinum* & *regulam*, ut dicunt, hoc eſt, per lineæ rectæ & circuli conſtructionem fruſtra quæſita. Demonſtrant enim Geometræ problema illud ad tertii gradus æquationem neceſſario pertinere, quæ quidem æquationes per ſolum circulum conſtrui non poſſunt. Neque ob eandem rationem per ſola Geometriæ elementa angulus dividi poteſt in partes 5, 6, 7, 9 &c. Talis enim diviſio, pro diverſo partium æqualium numero, ad altiores æquationum gradus aſſurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuiſſe volumus.

PROP. III. RADIUS, EG, IN PUNCTO CONCTATUS G AD TANGENTEM PERPENDICULARIS EST. Etenim quoniam tangens circulum in unico puncto tangit (ex cor. præc.), radius EG, minima eſt tangentis a centro diſtantia, ac proinde ad tangentem perpendicularis (ex def.).

Viceverſa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G, circulum tangit in unico puncto G. Etenim cum ſit EG, minima rectæ RT a centro, E diſtantia, alia quælibet puncta rectæ, RT, magis diſtant a centro quam punctum G, ergo ſingula puncta præter G, extra circumferentiam jacent.

COR. I. recta circumferentiam tangit in unico puncto; cum ex centro E, ad rectam datam unica perpendicularis duci poſſit. (cor. 4. prop. 1. cap. 1.).

COR. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto ſcilicet radio EG erectaque in G, perpendiculari RT.

COR. III. Ad punctum datum in circumferentia, unica tangens duci poteſt (loc. cit.) ac proinde ſi per punctum contactus agatur recta

cta quælibet, hæc coincidit cum tangente vel circumferentiam secat.

COR. IV. Si duo circuli GNA, GOQ, eandem habent tangentem, recta HG eidem perpendicularis per utriusque centrum puta E, P, transibit. Jam vero si ducatur ES, jungaturque PS, quæ producta secabit in O, circulum, GOQ, & in R, tangentem RT; erit semper in triangulo, ESP, latus PS, minus duobus reliquis, ES, EP (ex def. lineæ rectæ). Quare cum radii ES, EG æquales sint, erit recta PS, minor quam PG, sive PO. Ergo quodlibet punctum, S, circuli, GSF, erit intra circulum GOQ, ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G, in quo scilicet rectam RT, tangunt.

SCHOL. Cum inter tangentem & circulum nulla duci possit linea recta, angulus quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Hujus propositionis utilitas est in Physica, ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem concertationesque maximas excitavit; nempe angulus contactus quem facit arcus cum tangente ab infinita circulorum serie in infinitas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Hujus autem paradoxi Geometrici causam inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitæ lineæ nunquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest assignari, licet in partes infinitas dividi possint, ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli no-

nomine intelligatur portio finita ſpatii curva & tangente comprehenſi, nullum dubium eſt quin ſpatium illud comparari poſſit cum portione finita ſpatii rectarum duarum concurſu intercepti. At ſi anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens eſt notionem illam abſolute conſideratam angulo contactus convenire non poſſe, cum in hoc angulo latus unum ſit curvilineum. Itaque hujus anguli afferri debet propria definitio, atque hac definitione quæ arbitraria omnino eſt, ſemel conſtituta & explicata, jam nihil difficultatis ſupereſſe poteſt. Et requidem ipſa de ſolo nomine hic litigari demonſtrat ſumma Geometrarum conſenſio circa anguli hujus proprietates. Sed quidquid ſit, quicumque geometricarum demonſtrationum vim percipiet, pro evidenti habebit angulum contactus & minorem eſſe quovis rectilineo, & in infinitos curvilineos dividi poſſe.

PROB. IV. ANGULUS, BAD, TANGENTE BA ET CORDA AD, COMPREHENSUS HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM AFD. Etenim ducta per centrum, C, diametro, EG, cordæ AD, parallela (Fig. 4.), ductaque alia diametro f F eidem cordæ perpendiculari, rectus erit angulus BAC, tangente & radio comprehenſus (prop. præc.) itemque rectus eſt angulus FCG, ac proinde utriuſque anguli menſura eſt arcus FG. Sed angulus BAD = BAC — DAC, vel — ACG, ob parallelas DA, EG. Quare cum ACG pro menſura habeat arcum AG, erit angulus BAD = FAG — AG = FA = $\frac{1}{2}$ AD.

PROP. V. ANGULUS CAD (Fig. 5.) AD CIRCUMFERENTIAM HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM, CD, LATERIBUS AC, AD, INTERCEPTUM. Etenim ex anguli vertice, A, ducatur tangens EB, ſumma trium an-

angulorum BAC + CAD + DAE = 180° = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC & angulus EAD = $\frac{1}{2}$ AD (ex prop. præc.). Ergo angulus CAD = $\frac{1}{2}$ CD.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus eſt anguli DAC ad circumferentiam, eodem arcu, CD, ſubtenſi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli, ſemicircumferentiam lateribus ſuis comprehendit totaque diametro ſubtenditur. Angulus acutus arcum ſemicircumferentia minorem, obtuſus autem majorem intercipit, uterque corda ſubtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig. 6. 7.) vel intra vel extra circulum pro menſura habet $\frac{1}{2}$ BD $\pm$ $\frac{1}{2}$ CE. Signum + valet pro angulo intra circulum, ſignum — pro angulo extra. Per E agatur corda EF, rectæ AD parallela, erit angulus BEF = BAD (ob parallelas). Sed menſura anguli BEF eſt $\frac{1}{2}$ BF, & $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD $\frac{1}{2}$ DF, & DF = CE (cor. 3. prop. 2.). Ergo $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD $\pm$ $\frac{1}{2}$ CE.

COR. IV. Angulus bAD (Fig. 7.) tangente Ad & ſecante AD, interceptus = $\frac{1}{2}$ Db — $\frac{1}{2}$ bC. Si enim circa punctum A, revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in b, puncta E, B, convenient in b. Simili ratione angulus, dAb, inter duas tangentes, Ad, Ab, comprehenſus, pro menſura habet $\frac{1}{2}$ dFb — $\frac{1}{2}$ dCb.

CAPUT III.

De lineis rectis quæ spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

PROP. I. IN TRIANGULO QUOLIBET, SUMMA TRIUM ANGULORUM ÆQUALIS EST DUOBUS RECTIS. Etenim per tres angulorum vertices describatur circulus, (cor. 2. prop. 2. cap. 2.) triangulum erit inscriptum circulo cujus cordæ erunt tria latera; anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (prop. 5. cap. 2.). Quare trium angulorum summa æqualis est dimidiæ trium arcuum summæ, hoc est, dimidiæ circumferentiæ seu gradibus 180.

COR. I. In triangulo unicus esse potest angulus rectus vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo, angulus acutus est *complementum* alterius ad rectum.

COR. II. Datis duobus angulis in triangulo datur & tertius qui est differentia inter datam duorum angulorum summam & gradus 180. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa quæ est *complementum* ad duos rectos, & *supplementum* simpliciter appellari solet.

COR. III. In triangulo quolibet ABC (Fig. 8.) producto latere CB, angulus externus ABI æqualis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, & interni contigui ABC, æqualis est duobus rectis (prop. 1. cap. 1.). Sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC æqualis etiam est duobus rectis. Ergo angulus externus ABI æqualis est duobus internis oppositis, ACB, CAB; dempto scilicet communi angulo, ABC.

PROP.

PROP. II. In omni triangulo majus latus opponitur majori angulo, minus autem minori, et viceversa angulus major majori lateri, et minor minori opponitur. Triangulum circulo inscribatur, majorem angulum metitur arcus major, & majorem arcum subtendit major corda, & contra (cor. 2. prop. 2. cap. 2.)

COR. I. In triangulo æquilatero, singuli anguli æquales sunt inter se, & viceversa si tres anguli sunt æquales inter se, triangulum est æquilaterum. Inscripto enim, ut ante, triangulo in circulo, tria latera æqualia fient tres æquales circuli cordæ quæ proinde tres arcus æquales subtendent, ideoque & tres anguli æquales sunt. Evidens autem est unumquemque angulum esse tertiam partem grad. 180, hoc est, grad. 60.

COR. II. In triangulo isoscele æquales sunt anguli lateribus æqualibus oppositi; & contra si duo anguli in triangulo æquales sunt, triangulum est isoscele. Patet ut in coroll. præc.

PROP. III. Si in duobus triangulis tria latera æqualia sint, tota triangula erunt æqualia. Sit AB = ab, AC = ac, BC = bc (Fig. 9.) Ex punctis A, B, tamquam centris describantur arcus FCG, DCE, se invicem secantes in C. Triangulum abc, ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A, conveniat cum a; punctum b, cadet etiam in B, ob AB = ab; & ob ac = AC, recta ac, terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob bc = BC, recta bc, terminabitur in aliquo puncto arcus DCE; quia vero rectæ, ac, bc, se mutuo jungunt in, c, utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo, ac, congruet

cum AC ; bc, cum BC, totumque triangulum, abc, cum triangulo ABC.

COR. I. Si ſit angulus A = a, B = b, C = c, & latus AB = ab, erit triangulum ABC = triangulo abc. Latus, ab, imponatur lateri AB; ob angulum a = A, & b = B, cadet, ac, in AC, & bc in BC; quare latera duo, ac, bc, & AC, BC, in eodem puncto jungentur, hoc eſt, c cadet in C, totumque triangulum abc, congruet cum triangulo ABC. Eodem modo comparari inter ſe poſſunt latera duo, ac, AC, quæ reſpondent angulis æqualibus & dicuntur *omologa*. Quare æqualia ſunt triangula duo, ſi anguli unius æquales ſint angulis alterius, & præterea ſi triangula latus unum omologum æquale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerint æqualia & angulos his lateribus interceptos æquales, tota triangula erunt æqualia. Sit AC = ac, AB = ab, & angulus A = a. Imponatur latus AB, lateri ab, & latus AC, lateri ac; ob angulos A, a, æquales, latera illa congruent. Præterea cum ſit AC = ac, & AB = ab, punctum, c, cadet in C, & b in B, ac proinde bc congruet cum BC.

PROP. IV. SI DUO TRIANGULA INÆQUALIA ÆQUALES HABEANT ANGULOS, PONATURQUE ANGULUS UNUS SUPRA ALTERUM ÆQUALEM ANGULUM, ITEMQUE SIBI MUTUO IMPONANTUR LATERA OMOLOGA QUÆ ÆQUALEM IN UTROQUE TRIANGULO ANGULUM COMPREHENDUNT, ERIT TERTIUM LATUS TERTIO LATERI PARALLELUM. Ponatur angulus D (Fig. 10.) ſupra angulum æqualem B, latus DF, ſupra latus omologum BC, & latus DE, ſupra latus BA, itidem omologum; erit latus FE, vel ſe, parallelum lateri AC. Cum enim angulus ſeB æqualis ſit angulo

gulo CAB, erit recta fe, rectæ AC parallela (prop. 2. cap. 1.). Si angulus, F, poneretur supra angulum æqualem, C, simili modo demonstratur rectam DE, esse rectæ AB, parallelam. Idem dicendum de rectis FD, BC.

Viceversa si per punctum f, pro arbitrio sumptum in latere trianguli agatur recta fe, parallela rectæ AC, æquales sunt anguli Bfe, BCA, & Bef, BAC (loc. cit.). Triangula illa quæ angulos habent respective æquales, dicuntur *similia*.

PROP. V. QUODLIBET POLYGONUM RESOLVI POTEST IN TOT TRIANGULA, QUOT SUNT POLYGONI LATERA. Etenim ex puncto C, intra polygonum (Fig. 11.) ad singulos angulos duci possunt rectæ; evidens autem est tot esse triangula quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula dividi possunt polygona (Fig. 12.). Si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectæ, quot duci possunt, quæ tamen se mutuo non secent. Illæ autem rectæ quæ ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocantur; patet in hoc casu tot esse triangula quot latera polygoni, demptis duobus.

COR. I. Summa angulorum polygoni æqualis est producto ex 180° in numerum laterum, demptis duobus, hoc est, demptis 360°. Etenim anguli polygoni simul sumpti æquales sunt angulis omnibus triangulorum in quæ reductum est polygonum, demptis angulis quorum vertex est in C. Horum autem angulorum summa est 360° (prop. 1. cap. 5.). Sed tot sunt triangula quot latera; quare summa omnium angulorum polygoni æqualis est producto ex 180° in numerum laterum, binario

E 3 mul-

mulctatum. Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum est $= 180° \times \overline{7-2} = 900$.

Idem quoque evidens est, si polygonum per diagonales in triangula dividatur; erit enim in his triangulis angulorum summa angulis polygoni æqualis, ac proinde summa illa æqualis est producto ex 180° in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes æquales anguli polygoni per rectas AC, BC, DC, EC, &c.; rectæ illæ se mutuo secabunt in C, & erunt inter se æquales. Etenim rectæ AC, BC, sibi occurrentes in puncto aliquo C, efficiunt triangulum ABC; itemque rectæ BC, DC, aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt æqualia; nam cum anguli polygoni regularis æquales sint & bifariam æqualiter dividantur, æquales sunt anguli CAB, CBA, inter se, & angulis CBD, CDB; præterea æqualia sunt latera AB, BD. Ergo isoscelia sunt & æqualia triangula ACB, BCD (cor. 2. prop. 3.). Quare AC $=$ DC $=$ BC; & propter latus commune BC, punctum intersectionis C, rectarum AC, BC, cadet in punctum intersectionis, C, rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC &c.

COR. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti polygonum dividunt in tot triangula isoscelia & æqualia quot sunt polygoni latera; & quodlibet polygoni latus fit corda arcus qui æqualis est quoto ex gradibus 360 per numerum laterum divisis. Ita latus decagoni est corda arcus grad. 36.

COR.

COR. IV. Latus exagoni regularis circulo inscripti æquale est circuli radio. Nam si ex centro C, in sex triangula dividatur exagonum, æquilatera sunt triangula illa ob radios CA, CB æquales, & angulum ACB = 60°. Quare singuli anguli CAB, ABC sunt etiam 60°, ac proinde CA = AB.

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumscribi potest, hoc est, intra polygonum regulare describi potest circulus qui singula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inscripti, totidem sint cordæ æquales, cordæ illæ a centro æqualiter distant (cor. 1. prop. 2. cap. 2.). Quare si ex centro C, agantur perpendiculares CI, CK, hæ cordas æqualiter divident, atque æquales erunt. Ergo per singulas perpendicularium extremitates describi poterit circulus qui singula polygoni latera in puncto medio tanget (cor. 1. prop. 3. cap. 2.)

COR. VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumscribi potest. Quæratur polygoni centrum, quo invento, circulus facile circumscribitur. Item polygono regulari circulus facile inscribitur; invento polygoni centro, ad latus aliquod demittatur perpendicularis, hæc erit circuli radius.

Viceversa polygonum regulare circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360° per duplum numerum laterum polygoni, sumptoque arcu iK, qui sit quoto æqualis, per extremitates K, i, ducatur radius CK, agaturque recta indeterminata CB, ad punctum K, erigatur perpendicularis DKB, occurrens CB in puncto B, transferatur KB, in KD; erit DB, latus polygoni quæsiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam radio CB, describa-

batur circulus & per totam circumferentiam transferatur corda DB, atque inscribatur polygonum DB AG FED, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; cum per constructionem tot habeantur tangentes æquales & æqualiter divisæ in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quæsito.

Simili constructione circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360° per numerum laterum polygoni quæsiti, sumatur in circulo dato arcus huic quoto æqualis, corda hujus arcus erit latus polygoni; transferatur corda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quæsitum.

Hic autem diligenter observandum est per Geometriam elementarem circulo inscribi posse duntaxat triangulum equilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, & polygona regularia in quibus numerus laterum se habet in progressione geometrica dupla. Ita triangulum æquilaterum præbet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 &c. quadratum præbet polygona laterum 8, 16, 32, 64 &c. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 &c. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 &c. Alia polygona ut Eptagonum, Enneagonum, Endecagonum &c. describi non possunt geometrice, nisi per constructionem æquationum quæ ad sublimiorem gradum assurgunt.

SCOL. Cum polygonum regulare circulo inscribi & circumscribi possit, quo major est in polygono inscripto vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita ut differentia inter polygonum & circulum sit data quavis differen-

rentia minor, jam circulus considerari poterit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinite parvis compositum. Hæc circuli consideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitatum A, B, differentia sit qualibet assignabili minor, quantitates illæ velut æquales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, jam quantitatum illarum differentia non est qualibet assignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem quæ ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, hujus alterius quantitatis *limes* appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *Exhaustiorum*, seu *primarum* & *ultimarum* rationum. Hanc methodum quam fusius explicabimus in prima parte Physices, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo capite, quantum hactenus nobis satis est, breviter exponemus.

CAPUT IV.

De linearum ratione seu de proportionibus.

PROP. I. IN TRIANGULIS SIMILIBUS, acb, ACB, (Fig. 13.) LATERA OMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA. Ponatur, ab, pars dimidia rectæ AB, agaturque cg, parallela rectæ AB, erit cg = bA. Quod evidens est ex linearum parallelismo; ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas æquales & ob latus commune, bg, triangulum bcg, æquale triangulo bgB, & latus cg = bB (cor. 1. prop. 3. cap. præc.). Ergo cg = bB = Ab. Præterea triangulum Ccg, æquale est triangulo cAb (loco cit.) Ergo Cc = Ac, & Cg = cb = gB. Quare Ac, vel Cc,

erit pars dimidia rectæ AC, ſicut, cb, eſt pars dimidia rectæ CB.

Si, ab, ſit tertia vel quarta aut quælibet alia pars rectæ AB, (Fig. 14.) ſimili modo evidens eſt rectas, ac, cb, eſſe tertiam, quartam &c. partem rectarum AC, CB. Etenim ex diviſionum punctis, b, f, in recta, AB, ducantur bc, fh, &c. rectæ BC parallelæ, & eadem ratiocinatione patet triangula Acb, chg, hCi &c. æqualia eſſe triangulo acb.

Si recta, ab, accurate non contineatur in AB, ſed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio, ſimili ratione, ac, bis cum dimidio continebitur in AC, & bc, in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg, æqualibus triangulo acb; inter parallelas hf, & CB, conſtrui poterit triangulum, Chi, cujus latera erunt dimidia pars laterum in triangulo cAb; quod eſt evidens, cum ſit fB, pars dimidia rectæ Ab, (per hyp.) & recta, hi, æqualis rectæ, fB, ob parallelas, hf, CB.

Tandem ponamus in triangulis ACB, hCi, rectas AB, hi, eſſe inter ſe *incommenſurabiles*; diviſa intelligatur recta, hi, in partes 100, jam recta AB, certum continebit partium numerum cum aliquo reſiduo, cum lineæ illæ ſint incommenſurabiles. Rurſus recta, hi, diviſa fingatur in partes 1000, certum earumdem partium numerum continebit recta AB, ſed cum reſiduo quod priori reſiduo minus eſt, atque ita deinceps minus perpetuo fiet reſiduum, quo plures erunt partes. Quare ponatur partium numerus infinitus, jam reſiduum ſit nullum. Ergo generatim triangula quælibet ſimilia, latera omologa habent proportionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB, erit ad numerum partium in CA, inter eaſdem pa-

parallelas, ut numerus quilibet alius partium in CB, ad numerum partium in CA, inter easdem parallelas. Etenim Ch : hc = Ci : im, & Ch ; Ci = hc : im. Item hc : cA = im : mB, & hc : im = CA : mb. Ergo Ch : Ci = hc : im = cA : mB. Quare CA est ad CB, ut numerus quilibet partium in CB, ad eundem numerum partium in CA.

PRP. II. DUO TRIANGULA IN QUIBUS LATERA OMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA, ÆQUIANGULA SUNT. Si (Fig. 10.) ponatur AC : BC = FE : FD, & AC : AB = FE : ED, æquiangula erunt triangula ABC, DEF. Nam si super EF, construatur triangulum FEG, triangulo ABC, æquiangulum, facto scilicet angulo GEF = BAC, & angulo GFE = BAC, & angulo GFE = BCA, erit AC : BC = FE : FG : sed (per Hyp.) AC : BC = FE : FD, ergo FE : FG = FE : FD, ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FEG, similia, erit AC : AB = FE : FG : sed (ex Hyp.) AC : AB = FE : ED. Ergo FE : EG = FE : ED, ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED, FEG æquiangula sunt & æqualia, ob latus commune FE, & latera FD, FG, & EG, ED æqualia (prop. 3. cap. præc.) Sed (per constr.) triangulum FEG, triangulo ABC, est æquiangulum, ergo triangulum FED, ipsi quoque est æquiangulum.

COR. I. Si in triangulis ABC, DEF, sit angulus D = B, & præterea DE : DF = BA : BC, erit triangulum DEF, triangulo ABC æquiangulum. Nam super AB capiatur Be = DE, ducaturque, ef, parallela rectæ AC, triangula ABC, eBf, sunt æquiangula ; cum ob parallelam, af, angulus feB = A, efB = C, & ob angulum B, communem. Ergo Be : Bf = BA : BC. Sed (ex Hyp.) DE : DF = BA :

 BC,

BC, ergo Be, Bf = DE : DF; at Be = DE, ergo Bf = DF; ac proinde duo triangula Bef, DEF, sunt æqualia & similia; sed Bef, est triangulo ABC, æquiangulum, ergo triangulum DEF, est æquiangulum triangulo ABC, ac proinde generatim triangula duo quæ duo latera omologa circa æqualem angulum habent proportionalia, sunt æquiangula.

COR. II. Si recta AD, (Fig. 15.) angulum BAC, bifariam & æqualiter dividat in triangulo BAC, eadem recta latus oppositum BC, dividit quoque in duas partes BD, DC, lateribus AB, AC, proportionales. Etenim producta recta CA, per punctum B, agatur BE, recta AD, parallela, triangula BCE, DAC, erunt similia (prop. 1.) ac proinde BD : DC = AE : AC; sed ob parallelas, angulus BEA = DAC = DAB = ABE; ergo triangulum BAE, est isoscele (cor. 2. prop. 2. cap. præc.); quare AE = AB, ideoque BD : DC = AB : AC.

COR. III. Si ex angulo recto A, trianguli rectanguli BAC, demittatur perpendicularis AD, in basim BC, quæ angulo recto imminet & *hypothenusa* dicitur, hæc dividet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC, inter se & triangulo BAC similia. Et quidem triangula BAD, DAC, præter angulum rectum, habent quoque cum triangulo BAC, angulum communem, ac proinde similia sunt inter se & toti triangulo. Hinc BD : DA = DA : DC, & BD : BA = BA : BC, ac tandem DC : CA = CA : CB.

COR. IV. Cum sit BD : BA = BA : BC, erit BA^2 = BD × BC (ob productum mediorum æquale producto extremorum). Similiter cum sit DC : AC = AC : CB, erit AC_2 = DC × CB. Ergo BA^2

$+ AC^2$

$+ AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BD^2$. Quare quadratum hypothenusæ in triangulo rectangulo æquale est quadratis laterum.

COR. IV. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Cum enim diagonalis sit hypothenusa trianguli rectanguli cujus latera sunt æqualia, quadratum diagonalis æquale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli (ex demonstratis in Arithmetica). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis & contra.

COR. V, Perpendicularis EO (Fig. 16.) ex circumferentiæ circuli puncto quolibet in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO, OL; nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectæ EC, EL, triangulum CEL, est rectangulum in E, ac proinde $CO : EO = EO : OL$, & $EO^2 = CO \times OL$; recta perpendicularis BO, dici solet *ordinata*; *abscissa* autem vocatur pars CO, diametri inter perpendicularem & circumferentiam comprehensa.

PROP. III. *Si ducantur in circulo cordæ duæ* BA, DC (Fig. 17.) *se mutuo secantes in* E, *cordarum segmenta erunt reciproce proportionalia*. Si enim ducantur DA, CB, triangula BEC, DAC, sunt similia ob angulos in E, æquales, atque ob angulos C, A, & B, D, iisdem arcubus subtensos. Quare $AE : DE = CE : BE$.

COR. I. Si duæ lineæ EB, EC (Fig. 18.) ex eodem puncto extra circulum ductæ, ad superficiem concavam terminentur, partes externæ EA, EC, rectis integris EB, EC, sunt reciproce proportionales. Ductis enim cordis AC, DB,

DB, triangula, EBD, EAC, similia sunt, ob angulum E, communem, & angulos B, C, eodem arcu AD, subtensos. Ergo EA : ED = Ec : EB.

COR. II. Si recta EB, sit secans, altera autem Ed, tangens, erit EB : Ed = Ed : EA. nam ductis dB, dA, similia erunt triangula EdB, EdA, ob angulum E communem, & angulos EBd, AdE æquales, quorum communis mensura est dimidius arcus Ad. (cor. 3. prop. 4. cap. 2.) Ergo angulus dAE = EdB, ac proinde EB : Ed = Ed : EA, hoc est, tangens est media proportionalis inter rectam totam EB, & partem externam EA.

COR. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione ut major pars sit media proportionalis inter totam rectam & ejusdem rectæ partem alteram. Nam (Fig. 19.) super datæ rectæ AB, extremitatem erigatur perpendicularis AE, dimidiæ AB, æqualem; & centro E, radio AE, describatur circulus DAF. Deinde per B & E agatur recta BF, & centro B, radio BD, describatur arcus DC, hic occurret rectæ AB, in puncto quæsito. Etenim ob tangentem BA, erit BF : BA = BA : BD, ac proinde BF — BA : BA = BA — BD : BD. Sed BF — BA = BD = BC; cum sit FD = BA, ut pote duplæ ipsius EA, quæ est dimidia rectæ AB. Simili modo BA — BD = AC; ergo, substitutione facta, BC : BA = AC : BC, vel BA : BC = BC : AC. In hoc corollario continetur problema quod his verbis proponere solent Geometræ: *rectam dividere in media & extrema ratione*.

Alia etiam problemata proponi solent qualia sunt: *tribus datis rectis quartam proportionalem invenire; inter duas rectas invenire mediam*

diam proportionalem. Sed hæc manifesta sunt ex præcedentibus.

PROP. IV. *Si duæ figuræ similes in triangula utcumque dividantur per diagonales ex angulis omologis ductas, triangula omologa erunt similia*. Etenim sint duo polygona ABCDE, FGHIK (Fig. 20.) in quibus angulus A = F, B = G, C = H, D = I, E = K, sitque præterea AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF, ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI, similia erunt triangula ABC, FGH, & ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam cum anguli B, G, æquales sint & lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, & ADE, FIK. Itaque angulus BAC = GFH, DAE = FIK. Ergo BAE — BAC — DAE = CAD = GFK — GFH — IFK = HFI. Igitur angulus CAD = angulo HFI. Simili modo ostenditur angulos ACD, FHI, & ADC, FIH æquales esse. Quare triangula ACD, FHI sunt æquiangula.

Viceversa duæ figuræ quælibet similes sunt, si in triangula æquiangula resolvi possint. Nam ob angulos æquales in triangulis æquiangulis, æquales sunt anguli homologi in unaquaque figura. Quare cum latera figurarum sint triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, figuræ similes sunt.

COR. IV. Si dividatur BC in L, latusque omologum GH, in M, in eadem ratione, ita ut sit BC : GH = LC : MH. Deinde si ducantur rectæ duæ ad arbitrium LN, MO quæ angulos CLN, HMO æquales efficiant, vel quæ dividant latera omologa ED, KI, in eadem ratione, ita ut sit ED : KI = DN : IO, erit LN : MO = CD : HI = BC : GH &c. Nam ductis NC, OH, triangula NCD, OHI, simi-

similia sunt ob angulos D, I, æquales lateribus proportionalibus NC, DC, & OI, IH, comprehensos. Quare Cd : HI = CN : HO, & angulus DCN = IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis æqualibus DCL, IHM, remanebunt æquales anguli NCL, OHM, ac proinde triangula NCL, OHM similia sunt; ideoque LN : MO = LC : MH = BC : GH = CD : HI &c. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineæ quæ dividant latera omologa vel angulos omologos in eadem ratione, lineæ illæ erunt proportionales inter se, atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuscumque omologis.

SCHOL. Linearum rationem jam consideravimus in quantitatibus finitis, superest ut pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitatum quas *infinite magnas* & *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est nullam quantitatem in se spectatam, & sine nostro cogitandi modo, aut infinite parvam esse aut infinite magnam; sed magnitudo quælibet in se determinata est. Et quidem data quavis magnitudine, utcumque parva, vel utcumque magna, alia semper minor in primo casu, & alia semper major in casu altero haberi potest; nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam*; quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinite magnam*; rationem quam duæ quantitates finitæ habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem diversos esse infinitorum & infinitesimorum ordines; licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita vel infinitesima, semper

per tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoſcumque limites augeri poteſt & minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoſcumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infiniteſimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infiniteſimam habeat rationem quam ipſa infiniteſima habet ad quantitatem finitam, quantitatem hanc dicimus infiniteſimam *ſecundi ordinis*, & ita deinceps. Viceverſa ſi quædam quantitas ſit ad finitam quantitatem, ut quantitas finita ad infiniteſimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*, & ita deinceps ſuperiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum ſit in circulo cujus diameter eſt ad cordam, ut eſt corda ipſa ad abſciſſam, ac proinde ſi fingatur corda infinite parva primi ordinis, erit abſciſſa infiniteſima ordinis ſecundi.

Ex his patet calculo ſubjici poſſe quantitates infinitas & infiniteſimas. Infinitum hac nota exprimi ſolet ∞. Quare numerorum ſeries infinita hoc modo repreſentari poteſt. $0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots \infty$. Pari modo quantitas qualibet finita concipi poteſt diviſa in partes perpetuo decreſcentes, donec perveniatur ad quantitatem infiniteſimam. Talis eſt ſeries, $\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$. Evidens autem eſt quantitatem infinitam finitæ quantitatis additione, vel ſubtractione majorem, vel minorem non fieri; cum finita quantitas ad quantitatem infinitam, rationem habeat qualibet data minorem; ſimili ratione, quantitas infinite parva quantitatem finitam augere, vel minuere non poteſt. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, & $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo ſi diverſi infinito-

nitorum ordines per diverſos exponentes deſignantur, erit $8^2 \pm a \infty = 8^2$ & $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty}$

$2 = \frac{1}{\infty}$. Verum ſi quantitates ejuſdem generis conſiderentur, ſive infinitæ, ſive infiniteſimæ, ex notione quantitatum illarum manifeſtum eſt eas non ſecus ac quantitates finitas tractari debere; probe enim recordandum eſt quantitates illas non abſolute ſed relative dumtaxat, & ſecundum noſtrum concipiendi modum, eſſe infinitas, vel infiniteſimas. Quare $\infty + 3 \infty = 3 = 2 \infty$, $1 \times 3\infty = \frac{\infty}{\infty}$; $\frac{2}{\infty} : \frac{a}{\infty} = \frac{2}{a} \infty \times 8 = \frac{\infty_3}{\infty_2}$; $8_1 \frac{\infty}{\infty_3}$; $\infty_2 = \frac{11}{} \times$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{\infty_2}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty_2}, = \frac{\infty}{\infty}_2 = \infty$. Ex his multa colligere eſt.

Quantitates infinitæ vel infiniteſimæ ejuſdem ordinis adduntur vel ſubtrahuntur non ſecus ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam ejuſdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis ſecundi. At quantitas infinita ordinis cujuſcumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam ejuſdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cujuſvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cujuſcumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum cujus exponens eſt ipſa exponentium ſumma. Contraria autem ratione, ſi quantitas infinita ordinis cujuſcumque per quantitatem infinitam ordinis cujuslibet dividatur, habetur quantitas cujus gradus deſignatur per ipſam exponentium differentiam. At ſi quantitas infiniteſima cujuslibet gradus per quantitatem infiniteſimam ordinis

dinis

dinis cujuscumque multiplicetur aut dividatur, in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprimetur gradum qui per exponentium summam exhibetur; in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum evehitur qui per ipsam exponentium differentiam repræsentatur, ita ut quantitas infinitesima per divisionem fieri possit finita atque etiam infinita. Hæc pauca dicta sint de *primarum & ultimarum rationum* methodo quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

I. EX linearum proportione tota pendet *Trigonometria*, quæ est ars resolvendi triangula; in triangulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli & tria latera. Huc autem refertur Trigonometriæ praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, partes reliquæ inveniantur; ac proinde tres partes datæ constituere debent tres primos proportionis terminos, & terminus quartus erit pars quæsita. Verum quia latera trianguli simplicem rationem non habent cum angulis quorum mensura sunt arcus circuli, angulis vel arcubus circuli substituuntur lineæ rectæ quæ arcus illos exhibeant, & trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones afferemus, & proprietates demonstrabimus.

Sit angulus quilibet ACB, (Fig. 21.) ex cujus vertice C, tamquam centro, & radio ad arbitrium sumpto describatur circulus AHaG.

Pro-

Producatur AC, in a, erigaturque in C, perpendicularis CH; evidens est angulum BCH vel arcum HB, esse *complementum* anguli ACB, vel arcus AB, atque etiam anguli BCa, vel arcus BHa; angulus BCa, vel arcus Ba est *supplementum* anguli ACB, vel arcus AB, & viceversa BA, est *complementum* ipsius HB, & *supplementum* ipsius aB. Recta BD, ex radii extremitate B, ad radium CA, perpendiculariter ducta, dicitur *sinus* arcus AB, vel anguli ACB. Recta AE, ex radii extremitate, A, perpendiculariter ducta & radio alteri occurrens in E, vocatur *tangens* arcus AE; recta autem CE, ejusdem arcus *secans* appelatur. Pars AD, radii inter arcum & sinum comprehensa dicitur sinus *versus* arcus AB. Perpendicularis BI, dicitur *sinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*; CK, *secans complementi* & HI *sinus versus complementi* arcus AB. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi &c. dicuntur *Cosinus*, *Cotangens*, *Cosecans*, *Cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio; sin. pro sinu; tang. pro tangente; sin. v. pro sinu verso.

II. Ex his definitionibus multa colliguntur .... 1°. Sinus, cosinus, tangens, cotangens &c. anguli obtusi BCa, sunt etiam sinus, cosinus &c. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B, vel a, demitti non potest perpendicularis quæ non cadat in radium alterum productum; tales sunt perpendiculares BD, a d; similiter tangens alia esse non potest quam a e; sed ob triangula aCD, BCD, & Cae, CAE, æqualia, habetur ad = BD, ae = AE. Cum autem sit arcus BH complementum arcus aB, atque etiam arcus

AB,

AB, evidens eſt BI, eſſe coſinum arcus aB, & HK illius cotangentem .... 2°. Sinus BD, arcus AB, eſt dimidium cordæ BG, arcum duplum, BAG, ſubtendentis. (Prop. 1 cap. 2.)... 3°. Sinus creſcunt creſcentibus angulis a, 0°, uſque ad 90°, & eodem modo decreſcunt a 90° uſque ad 180°... 4°. Sinus arcus 30° dimidio radio æqualis eſt; eſt enim radius æqualis cordę arcus 60°, (cor. 4. prop. 5. cap. 3.) & ejuſdem arcus ſinus eſt dimidia corda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppoſitum angulo 30° eſt dimidia hypothenuſa hujus trianguli. Nam ſi ACB = 30°, erit BG = BC, & BD = $\frac{1}{2}$ BC .... 5°. tangentes creſcunt, creſcentibus angulis a, 0°, uſque ad 90°, ita ut tangens arcus grad. 90, ſit infinita; nam radius CH, in angulo recto HCA, non poteſt concurrere cum tangente ... 6°. Tangens arcus 45°. æqualis eſt radio; nam ſi angulus ACB ſit 45°, triangulum rectangulum CAE, erit iſoſceles, & AE = AC .... 7°. Sinus verſus AD arcus qui minor eſt 90°, æqualis eſt differentiæ inter radium CA, & coſinum CD = BI. Præterea coſinus verſus HI eſt differentia inter radium CH, & ſinum CI = BD; at ſinus verſus ſupplementi nempe Da, æqualis eſt ſummæ radii & coſinus .... 8°. Ob triangula rectangula ſimilia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA : CD, vel BI = AE : BD, nempe radius eſt ad coſinum ut tangens ad ſinum. Deinde hæc alia habetur analogia, CH : CI, vel BD = HK : IB, hoc eſt, radius ad ſinum ut cotangens ad coſinum. Tandem AE : CA = CH, vel CA : HK; hoc eſt, tangens ad radium ut radius ad cotangentem .... 9°. Ex præcedentibus analogiis derivantur formulæ quarum ope ſinus ſubſtituuntur tangentibus & vice verſa. Sit R = 1, erit Sin. = Coſ. × Tang. =

Cos.

$\frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}$, $\text{Cos.} = \text{Sin.} \times \text{Cot.} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Tang.}}$ $\text{Tang.} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}} = \frac{1}{\text{Cot.}}$; $\text{Cot.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{Tang.}}$, $\text{Cot. A} \times \text{Tang. A} = 1 = \text{Cot. B} \times \text{Tang B}$ .... 10°. In omni triangulo sinus angulorum sunt ut latera angulis opposita. Etenim triangulum circulo inscribatur: singula latera sunt cordæ arcus dupli qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi; sed semisses sunt inter se ut tota, ergo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum. Hinc cum sinus anguli recti sit radius, & latus oppositum sit hypothenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenusam ut sinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppositum ... - 11°. In triangulo rectangulo cosinus anguli unius acuti est sinus anguli alterius; ergo sinus anguli unius acuti est ad suum cosinum ut latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum ut tangens ad radium; ergo in triangulo rectangulo, tangens anguli unius acuti est ad radium ut latus huic angulo acuto oppositum est ad latus alterum. 12° In triangulo quolibet ABC (Fig. 22.) hæc semper habetur analogia: majus latus AC est ad summam duorum aliorum laterum AB + BC, ut eorumdem laterum differentia AB — BC ad differentiam segmentorum AE, CE, quæ fiunt ducta ex angulo majori B, in majus latus AC, perpendiculari BE; nam si ex anguli vertice B, tanquam centro & radio qui sit minori lateri æqualis BC, describatur circulus GCD, producto latere AB in G, erit $AG = AB + BC$, & $AP = AB - BC$, atque ob $CE = ED$, erit $EA - CE = AD$, ac tandem $AC : AG = AP : AD$ ....

130. In omni triangulo ABC, summa duorum quorumcumque laterum $AB + BC$, est ad illorum differentiam $AB - BC$, ut tangens semisummæ duorum angulorum A, C, qui his lateribus opponuntur, ad tangentem semidifferentiæ eorumdem angulorum. Etenim sit P semisumma angulorum A, C, & Q illorum semidifferentia, erit angulus major $C = P + Q$, & minor $A = P - Q$. Jam (ex dem.) $AB : BC = \text{Sin. } C : \text{Sin. } A = \text{Sin. } \overline{P + Q} : \text{Sin. } \overline{P - Q} = \text{Sin. } P \times \text{Cof. } Q + \text{Cof. } P \times \text{Sin. } Q : \text{Sin. } P \times \text{Cof. } Q - \text{Cof. } P \times \text{Sin. } Q$. Ergo $AB \times \text{Sin. } P \times \text{Cof. } Q - AB \times \text{Cof. } P \times \text{Sin. } Q = BC \times \text{Sin. } P \times \text{Cof. } Q + BC \times \text{Cof. } P \times \text{Sin. } Q$; vel $\overline{AB - BC} \times \text{Sin. } P \times \text{Cof. } Q = \overline{AB + BC} \times \text{Cof. } P \times \text{Sin. } Q$; quare dividendo per $\text{Cof. } P \times \text{Cof. } Q$; factaque reductione habebitur $\overline{AB - BC} \times \text{Sin. } P = \overline{AB + BC} \times \frac{\text{Sin. } Q}{\text{Cof. } Q}$; sed $\frac{\text{Sin.}}{\text{Cof.}} =$ tang. Ergo $\overline{AB - BC} \times \text{Tang. } P = \overline{AB + BC} \times \text{Tang. } Q$. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{Tang. } P : \text{Tang. } Q = \text{Tang. } \frac{A + C}{2} : \text{Tang. } \frac{A - C}{2}$.

III. His principiis universa innititur Trigonometria; & quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum & angulus, vel duo anguli & latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quæ jam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata; at monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum quæ sunt ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor *absolutus*, cum infinita possint construi triangula similia

inæqualia. Neque etiam ſine obſervatione prætermittendus eſt caſus in quo dantur duo latera & angulus alterutri lateri oppoſitus. Caſus ille eſt ambiguus, & duas ſolutiones poteſt admittere; cum (ex dem.) ſinus anguli acuti ſit quoque ſinus complementi ad duos rectos. Quare ut tollatur ambiguitas, nota ſit oportet anguli ſpecies, hoc eſt, notum eſſe debet an angulus ſit acutus vel obtuſus: atque hinc etjam patet triangula duo utcumque inæqualia eſſe poſſe, quamvis habeant latera duo æqualia & æqualem angulum eidem lateri oppoſitum. In omnibus Trigonometriæ libris reperiuntur ſinuum & tangentium tabulæ. Quamvis autem ex hactenus demonſtratis manifeſtum ſit quo artificio conſtruantur, id tamen magis explicabimus. Dato ſinu grad. 30 (per num. præc.) inveniri poſſunt ſinus grad. 15; deinde $7^{\circ} \frac{1}{2}$ poſtea $3^{\circ} \frac{3}{4}$ & ita deinceps ſinuum ſemiſſes, progrediendo uſque ad 12am operationem, nempe uſque ad 52'' 44''' 3'''' $\frac{1}{4}$, qui quidem ſinus ſine errore ſenſibili cum arcu confunditur. Quia vero ſinus illi minimi ſunt arcubus proportionales, dici poterit: ut arcus ille eſt ad ſuum ſinum, ita arcus 1' eſt itidem ad ſuum ſinum. Dato autem ſinu arcus 1' invenientur ſinus arcuum 2' 3' 4' & ita deinceps uſque ad 30°. Tandem a 30° uſque ad 60°, & a 60 uſque ad 90°, progredi licebit; quo facto tangentes ad calculum revocare jam promptum erit. Itaque tota difficultas in ſinuum calculo poſita eſt; rem ergo exponemus.

I. Si in arcu quolibet AB (Fig. 21.) detur ſinus aut coſinus, ſinuſverſus aut coſinuſverſus, ex uno dumtaxat dato, tria reliqua inveniuntur. Nam $CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$ & $\text{Coſ.} = \sqrt{R^2 - \text{Sin.}^2}$ præterea $DA = CA -$

CD &

CD, & Sin. verſus = R — Coſ. tandem HI = CH — CI & Coſ. verſus = R — Sin.

II. Initis calculis in arcu quolibet, pro dimidio vel duplo arcu calculus facile inſtitui poteſt. Nam (Fig. 23.) ducta corda BA, & ex puncto C, demiſſa perpendiculari CE, datiſque BD, DA, erit $BA = \sqrt{BD^2 + DA^2}$. Quare FA vel $\text{Sin.} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{Sin.}^2 + \text{Sin. verſ.}^2}$. Et $CF = \sqrt{CA^2 - AF^2}$. Ergo $\text{Coſ.} \frac{1}{2} = \sqrt{RR - \text{Sin.}^2 \frac{21}{2}}$. Præterea ſi habeatur AE, tamquam arcus datus, ſimilia erunt triangula FCA, DBA; quare CA : CF = AB : BD, vel R : Coſ. arc = 2. Sin. arc : Siu. arcus dupli.

III. Datis ſinubus BD, KL, duorum arcuum AB, KB, habetur ſinus KM illorum ſummæ (Fig. 24.) vel illorum differentiæ (Fig. 25.) Etenim datis CD, CL, erit CB : CL = BD : LP, vel OM; ergo $OM = \frac{\text{Sin. } AB \times \text{Cos. } KB}{R}$, præterea ob triangula rectangula ſimilia, KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig. 24.) & KOL, KMQ CQL, CBD (Fig. 25.) erit in triangulis KOL, CBD, CB : CD = KL : KO. Quare $KO = \frac{\text{Sin. } KB \times \text{Cos. } AB}{R}$. Hinc facto R = 1 erit KM vel $\text{Sin. } BK + AB = \text{Sin. } BK \times \text{Coſ. } AB \pm \text{Sin. } AB \times \text{Cos. } KB$.

IV. Sit arcus AB 30° (Fig. 26.) & BF = BK ob triangula rectangula ſimilia SIF, SQG, erit angulus IFS = GQS = BCA = 30°. Ergo angulus KFC = 30°. Quare $CK = \frac{1}{2} FK = IK = FI$. Sed $FK^2 - GK^2 = FG^2$ vel $4IK^2 - IK^2 = FG^2$. Ergo $3IK^2$ vel $IK^2 \times 3 = FG^2$. Quare $IK \times \sqrt{3} = FG$, & $IK \times \sqrt{}$

$\times\sqrt{3}$ + KM = FN; hoc eſt, ſinus KM arcus KA minoris ſcilicet quam 30°, & ſinus KI differentiæ ſcilicet inter hunc arcum & 30° per $\sqrt{3}$ multiplicatus ſimul ſunt æquales ſinui FN arcus FA, qui tanto major eſt 30 arcu 30° quanto arcus KA, minor eſt.

V. Ob arcum FI = GK, erit FT + GH = KO, nempe ſinus FT, arcus HF, minoris quam 60° & ſinus FI differentiæ ſcilicet inter hunc arcum & 60° ſimul æquantur ſinui KO arcus HK, qui tanto major eſt arcu 60° quanto FK minor eſt. Ita Sin. 55° + Sin. 50° = Sin. 63°. Itaque demonſtravimus principia quorum ope formari poſſunt ſinuum & tangentium tabulæ. Illæ autem tabulæ commoditatis ergo per logarithmos conſtruuntur, cujus quidem conſtructionis ratio ex logarithmorum doctrina jam explicata intelligitur.

SECTIO II.

De Geometria ſuperficierum.

CAPUT I.

De præcipuis planarum ſuperficiarum proprietatibus.

PROP. I. TRIA PUNCTA QUÆ IN EADEM RECTA NON JACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT. Id patet ex definitione ipſius plani. Et quidem per tria puncta duci poteſt planum, quod evidens eſt; illud vero planum unicum eſſe manifeſtum eſt; ponamus enim planum aliud quod cum primo in tribus punctis congruat, in aliis autem ab ipſo deflectat, jam eadem linea recta quæ pri-

primum planum tangeret, alteri plano aptari perpetuo non posset, neque secunda superficies illa foret omnium intra eosdem terminos ductarum brevissima; quod est contra definitionem plani. Ergo per tria puncta unicum planum duci potest, ac proinde constans est ac determinata positio plani, per data tria puncta transeuntis.

COR. I. Duæ rectæ se invicem secantes, sunt in eodem plano. Nam punctum intersectionis & punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumptum, tria sunt puncta in directum non posita quæ proinde determinant positionem plani in quo jacent duo utriusque lineæ puncta, ac proinde & totæ binæ lineæ (ex def.)

COR. II. Si duæ rectæ jacentes in eodem plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque jacebit plano. Nam duo ejusdem lineæ puncta, duæ scilicet intersectiones, sunt in eodem plano. Si autem ponamus duas rectas se mutuo secare, patet in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin unicum haberetur punctum quod rectæ positionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum intersectio est linea recta. Nam duorum planorum intersectio est linea cujus singula puncta jacent in utroque plano. Patet autem tria puncta duobus planis communia esse non posse, nisi jaceant in directum. Cum enim tria puncta quæ non sunt in eadem recta positionem plani determinent, si tria puncta in directum non posita duobus planis communia esse possent, jam tria puncta positionem plani non determinarent. Quare planorum duorum intersectio est linea recta.

COR. IV. Recta ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano jacentes & per extremitatem perpendicularis transeuntes. Etenim ponamus rectam illam ad planum perpendicularem, non insistere perpendiculariter ad aliquam ex prædictis lineis, jam linea illa infra planum deprimitur vel attollitur supra idem planum, ac proinde non jaceret in eodem plano (quod est contra hypoth.)

COR. V. Duæ rectæ ad idem planum perpendiculares vel æqualiter inclinatæ, sunt inter se parallelæ, & contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta in plano jungantur, duæ illæ lineæ ad planum perpendiculares vel æqualiter inclinatæ, erunt quoque perpendiculares vel æqualiter inclinatæ ad eandem lineam jungentem; est enim in eodem plano. Quare (ex parallelarum def.) rectæ illæ erunt parallelæ & vice versa.

PROP. II. DUO PLANA SIBI MUTUO INCLINATA, EASDEM HABENT PROPRIETATES QUAS IN RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMUS. Ponamus planum aliquod A, immobile in quo jaceat planum aliud B, lineis rectis terminatum, qualia sunt polygona rectilinea; hæc duo plana ut pote omni crassitie destituta in unum coalescunt planum. At si planum B, revolvi intelligatur circa latus aliquod plano A, fixum perpetuo manens, totum plani motum sibi facile quisque repræsentabit. Et quidem 1°. ab ipso motus initio nihil duobus planis manebit commune præter rectam circa quam planum B, revolvitur, quæ proinde est utriusque plani intersectio...... 2°. planum illud singulos percurret inclinationis gradus, si tandiu convertatur, donec ad oppositam plani A, partem

per-

perveniat.... 3°. Planum revolvens plano immoto fiet perpendiculare, ubi ad eum pervenerit ſitum in quo non magis pendeat ex una parte quam ex alia..... 4°. Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli cujus centrum perpetuo manebit in communi planorum interſectione. Quia vero centrum in ipſo circuli plano jacet, neceſſum eſt hujus arcus centrum eſſe in linea recta cujus revolutione generatur ipſum arcus planum.... 5°. Si concipiatur linea quædam ſublimis cui perpendiculariter affixa ſit recta alia, hæc recta planum deſcribet, intercadum linea ſublimis circa ſeipſam convertitur in eodem perpetuo manens loco. Si autem duæ lineæ ſibi invicem non forent perpendiculares, jam figura revolvendo deſcripta plana non foret; ſed ex una parte convexa & ex altera concava, ut patet. Quare ex ipſa plani formatione evidens eſt revolutione rectæ planum deſcribi non poſſe, niſi recta revolvens ſit ad lineam in qua revolvitur perpendicularis.... 6°. Centrum arcus in quo ſumuntur gradus inclinationis plani unius ad aliud, poſitum eſt in perpendiculari ex puncto quolibet arcus ad planorum interſectionem ducta. Quare ſi deſcribatur ſemicirculus cujus centrum ſit in linea duobus planis communi & cujus planum ſit ad planum immotum perpendiculare, per hujus ſemicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quare generatim plana duo ad ſe invicem inclinata eaſdem habent proprietates quæ in mutua linearum inclinatione demonſtrantur.

COR. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis æquales. (Prop. 1. cap. 1.)

COR. II. In planorum interſectione æquales

les ſunt anguli ad verticem oppoſiti. (Cor. 2. Prop. 1. cap. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eamdem habeant communem interſectionem, ſummæ angulorum omnium eſt 360°. (Cor. 1. Prop. 1. cap. 1.)

COR. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci poteſt. (Cor. 4. Prop. 1. cap. 1.)

COR. V. Diſtantia puncti alicujus a plano dato, eſt perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (ex def.)

COR. VI. Planum ſecans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos æquales, item æquales angulos alternos internos. Præterea angulus internus alterius interni ſupplementum eſt, atque etiam angulus externus eſt ſupplementum alterius (Prop. 2. cap. 1.)

COR. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano ſecentur, communes interſectiones erunt parallelæ. Si enim non ſint parallelæ, ſibi occurrere poſſunt, ac proinde & plana ipſa in quibus hæ lineæ jacent, ideoque plana non forent parallela, quod eſt contra hyp.

CAPUT II.

De ſuperficierum menſura.

PROP. I. SUPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGULI ÆQUALIS EST PRODUCTO EX BASI IN ALTITUDINEM. Sit parallelogrammum rectangulum ABCD (Fig. 26.) cujus altitudo AD, certum contineat pedum numerum. E. G. 7, baſis autem AB, octo contineat; diviſum intelligi poterit parallelogram-

grammum in 7 ſuperficies, ut DM, quæ ſingulæ continent octo minores ſuperficies quadratas, ſive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius ſuperficies, ſi octo pedes quadrati qui in prima ſuperficie continentur, toties ſumantur quot ſunt æquales ſuperficies ut DM, ac proinde ſuperficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidens eſt in hac demonſtratione fingi poſſe alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonſtratio etiamſi altitudo & baſis parallelogrammi ponantur *incommenſurabiles*, ut patet ex Prop. 1. cap. 4.

COR. I. Si parallelogrammum BD, per diagonalem dividatur, habebuntur triangula duo rectangula æqualia, quorum proinde ſuperficies ut pote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex baſi in altitudinem.

Eadem eſt demonſtratio pro triangulo quolibet etiam non rectangulo. Sit enim triangulum CAB (Fig. 27.), non rectangulum; ex puncto A, demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE, erit triangulum CAD, dimidium rectanguli FACD, & triangulum DAB, dimidium rectanguli DABE. Quare, ut ante, ſuperficies trianguli eſt dimidium productum ex baſi in altitudinem.

Idem patet etiamſi perpendicularis EB, trianguli CED, cadat extra baſim. Nam triangulum DEB, eſt dimidium rectanguli DAEB, & triangulum CEB, eſt dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum CED, ſeu $CEB - DEB = \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD =$

$$\frac{\overline{CB-DB}}{2} \times AD = \frac{1}{2} CD \times AD;$$ ac proin-

de trianguli cujuslibet superficies æqualis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula æqualia quæ ipsam habent parallelogrammi basim eamdemque altitudinem, patet generatim superficiem parallelogrammi cujuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas & super eadem vel æquali basi constituta, sunt æqualia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis constituta & super eadem basi sunt parallelogrammorum dimidia ac proinde etiam inter se æqualia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis quod alio modo jam demonstravimus; nempe *quadratum hypothenusæ in triangulo rectangulo, æquale esse quadratis laterum*. Hanc vero Geometriæ fæcunditatem totiusque doctrinæ geometricæ conjunctionem variis exemplis Tyronibus sæpe ostendere debet peritus magister.

COR. IV. Cum triangula sint ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam ut productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium & altitudinum; ac proinde, si bases fuerint æquales, triangula erunt inter se ut altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erunt inter se ut bases.

COR. V. Si altitudo trianguli unius sit ad trianguli alterius altitudinem ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt æqualia. In hoc enim casu habetur proportio in qua productum extremorum æqua-

quale eſt producto mediorum, hoc eſt, productum ex altitudine primi trianguli in baſim æquale eſt producto ex altitudine ſecundi trianguli in ſuam baſim, ideoque triangula ſunt æqualia; & viceverſa ſi triangula ſunt æqualia, erunt baſes in ratione inverſa altitudinum.

COR. VI. In triangulis ſimilibus ſuperficies ſunt in ratione duplicata laterum omologorum. Etenim cum triangula ſint in ratione compoſita baſium & altitudinum, atque (ex hyp.) ſint ſimilia, loco baſis ſubſtitui poterit altitudo & contra. Quare triangula ſimilia ſunt ut quadrata laterum omologorum.

PROP. II. SUPERFICIES POLYGONI REGULARIS ÆQUALIS EST DIMIDIO PRODUCTO EX PERPENDICULARI PER CENTRUM POLYGONI AD LATUS UNUM DEMISSA, IN POLYGONI CIRCUMFERENTIAM. Etenim triangula omnia in quæ reſolvitur polygonum regulare, ſunt æqualia (Prop. 5. cap. 3.) ideoque eamdem habent altitudinem, CI, (Fig. 11.) Sed ſuperficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$ &c. Quare cum $AB + BD + DE$ &c. ſit tota polygoni peripheria, patet ſuperficiem totam polygoni æqualem eſſe producto ex altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

COR. I. Superficies circuli æqualis eſt dimidio producto ex radio in circumferentiam.

COR. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis & arcu comprehenſa *Sector* dicitur; evidens autem eſt hujus ſectoris ſuperficiem æqualem eſſe dimidio producto ex arcu in radium.

PROP. III. FIGURARUM SIMILIUM SUPERFICIES SUNT IN RATIONE DUPLICATA LATERUM OMOLOGORUM. Etenim triangula omologa in quæ reducuntur figuræ ſimiles, ſunt earumdem figurarum partes ſimiles (Prop. 4. cap. 4.), ac proinde triangula omologa erunt ut polygona tota; ſed triangula ſimilia ſunt in ratione duplicata laterum omologorum; ergo in eadem etiam ratione ſunt figuræ ſimiles quælibet.

COR. I. Superficies circulorum ſunt ut quadrata radiorum vel diametrorum.

SCOL. Ex propoſitionibus præcedentibus nota quidem eſt ratio quam habent variæ circulorum peripheriæ atque etiam illorum ſuperficies ad ſuos radios; at ratio accurata inter circuli circumferentiam illiuſque diametrum nondum definiri potuit, ita ut magnitudine diametri numeris expreſſa, numeris accurate exprimi non poſſit circuli circumferentia, ac proinde nec ipſa circuli ſuperficies. In hoc ſenſu intelligi debet quod vulgo dicitur, nondum ſcilicet inventam eſſe circuli *quadraturam*, quod quidem *quadraturæ* nomen adhiberi ſolet eo quod *quadratum* ſit cujuslibet ſuperficiei communis menſura, ut jam demonſtravimus. Eo igitur reducti ſunt Geometrarum conatus ut ad illam quadraturam proxime & quantum voluerint accedant, hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare ſoleant Geometræ ex ipſis elementis licebit intelligere. Diviſus concipiatur circulus primo in quatuor partes æquales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 &c. prout cuique libuerit, & concipiamus per ea diviſionum puncta tangentes & cordas reſpective ductas, habebuntur polygona duo quorum unum *inſcriptum* circulo, alterum autem *circumſcriptum*;

ptum; quæ quidem ambo constant triangulis æqualibus. Porro, per methodos explicatas, in his triangulis haberi semper poterunt bases quæ in primo casu sunt circulorum cordæ, in altero autem tangentes, ac proinde omnium quoque cordarum & tangentium summa innotescet, hoc est, perimeter polygoni inscripti quæ circuli circumferentia proxime minor est, & polygoni circumscripti perimeter quæ proxime major est, ita ut defectus vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit & intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit diametrum ad peripheriam esse in ratione 7, ad 22 ita ut exiguus omnino sit peripheriæ sic inventæ excessus supra veram. Hæc eadem ratio subtilius ab aliis quæsita est, & statuitur ut 1 ad 3, 14159265 &c. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quæ quidem *approximatio* est fere infinita; sed omnium vulgatissima & elegantissima ratio diametri ad peripheriam ea est quam exprimunt numeri 113, & 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si hæc fiat proportio 113 ad 355, ut diameter data ad peripheriam quæsitam; hæc multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, sive, ut vocant, *area*. Hæc pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli quam audacter se invenisse non raro jactitant viri Geometriæ imperiti qui ipsum quidem quæstionis statum ut plurimum non intelligunt.

Simili methodo figura quælibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas; aliquando per Geometriam sublimiorem figuræ curvilineæ area accurate haberi potest, sed commodissima & generalis est praxis qua figuræ curvilineæ circumferentia in minimas partes

& *physice* rectilineas dividitur, & deinde figuræ totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis quæ de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in Arithmetica; non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant Geometræ; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quælibet, a, pro communi basium & altitudinum mensura, & sit, B, numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem, a; atque H, exprimat quoties altitudo ejusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit, b, numerus exprimens quoties mensura, a, contineatur in basi alterius parallelogrammi; h, autem exponat quoties altitudo parallelogrammi ejusdem contineat mensuram a, parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se ut productum ex duobus numeris B, H, ad productum ex numeris duobus, b, h; hæc est genuina hujus operationis notio; quare dum dicitur parallelogrammi superficiem æqualem esse producto ex basi in altitudinem, *æqualitas* proprie dicta intelligi non debet, sed mera proportio. Hæc eadem observatio ad physicam sæpe transferri debet, ubi de spatii, velocitatis & temporis mensura sermo est.

SE-

SECTIO III.

De Geometria Solidorum.

CAPUT I.

De Solidorum genesi & proprietatibus.

PROP. I. SOLIDORUM RECTILINEORUM GENESIM EXPLICARE. Si figura rectilinea AGR, supra immotam rectam AE, (Fig. 28.) motu sibi semper parallelo feratur; solidum AGROFE, inde genitum *prisma* dicitur; & *rectum* vocatur, si AE, describenti plano recta fuerit, sin minus, *obliquum*. Si planum describens fuerit parallelogrammum, solidum inde genitum dicitur *parallepipedum*. Si autem planum describens sit quadratum, solidum *cubus* nuncupatur. Basis solidi seu planum describens potest esse polygonum quodlibet, & solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineæ æquales & parallelæ terminantes rectilineam solidi faciem. At si rectæ lineæ in apicem coeunt, solidum *pyramis* dicitur (Fig. 29.).

COR. I. Prisma igitur opposita latera, AGR, EFO, æqualia habet, similia & parallela; cum AGR, fluendo per AE, motu sibi semper parallelo tandem congruat cum EFO. Præterea dum planum AGR, motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA, motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA, ac proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur quot sunt latera plani describentis.

COR.

COR. II. Parallepipedum ſex parallelogrammis terminatur; cubus autem ſex quadratis æqualibus. Nam præter facies quatuor parallelo laterum motu genitas, ſunt etiam facies duæ oppoſitæ parallelo baſis motu deſcriptæ. Illa autem baſis in primo caſu eſt parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyramide ſi omnia latera baſis ſunt æqualia inter ſe & latera rectilinea ipſius pyramidis pariter inter ſe æqualia, erunt omnes facies triangula iſoſcelia æqualia.

COR. IV. Quævis ſectio priſmatis vel pyramidis facta plano baſi parallelo eſt figura prorſus ſimilis baſi. Etenim ſectionis parallelæ ſingula latera ſunt ſingulis lateribus baſis parallela, cum ſint interſectiones planorum parallelorum cum iiſdem planis. Quare ſinguli anguli omologi erunt æquales (Prop. 2. cap. præc.) ac proinde ſectio baſi ſimilis eſt.

COR. V. In priſmate ſectio baſi parallela, ipſi baſi æqualis eſt; in pyramide autem latera ſectionis omologa ſunt minora in ratione diſtantiæ ſectionis a vertice ad diſtantiam baſis ab eodem. In priſmate patet æqualitas, cum facies ſint parallelogramma; ac proinde latera ſectionis omologa æqualia ſunt lateribus baſis, ideoque ſectio prorſus æqualis eſt baſi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob ſectionem parallelam, in unaquaque facie habebuntur triangula duo ſimilia.

COR. VI. Omnia priſmata collata inter ſe atque etiam omnes pyramides inter ſe comparatæ, ſi ſuper baſibus æqualibus & inter eadem plana parallela conſtituantur, ſpatia ſolida reſpective æqualia comprehendunt. Secentur enim quotcumque planis quæ ſint baſibus parallela, ſectiones unius priſmatis vel pyramidis æquales ſemper erunt ſectionibus reſpondentibus alterius.

Nam

Nam in prismate omnes erunt æquales eidem basi; in pyramide erunt ipsi basi similes, & singula latera in una pyramide erunt ad latera omologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempe in ratione distantiæ basis a vertice ad sectionis distantiam ab eodem vertice, quæ quidem ratio eadem est, ut patet; cum pyramides terminentur plano, basium & sectionum planis parallelo. Porro solida illa concipi possunt tamquam composita ex iis omnibus sectionibus quarum singulæ cum singulis æquales sint, erunt & ipsa solida æqualia.

COR. VII. Pyramides basium æqualium in eumdem apicem desinentes vel eandem utcumque altitudinem habentes, sunt æquales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum, pyramides semper erunt super æqualibus basibus & in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

COR. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem, erunt inter se ut bases. Etenim basis major divisa intelligatur, si fieri possit in partes basi minori æquales, concipi poterit pyramis major tamquam composita ex diversis pyramidibus quæ basim habeant basi minori æqualem; sed pyramides illæ singulæ erunt minori pyramidi æquales, ergo pyramis major est ad minorem ut pyramidum æqualium numerus in majori pyramide ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illæ sunt inter se ut bases.

At si basis major minorem basim non contineret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingantur bases in partes huic mensuræ communi æquales, jam pyramides duæ tot alias continebunt pyrami-

des

des æquales quot ſunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides ſunt etjam ut baſes.

Tandem ſi pyramidum baſes forent incommenſurabiles, adhibeatur aliqua menſura quæ minuatur in infinitum donec fiat utriuſque baſis menſura communis, quemadmodum dictum eſt de figurarum ſimilitudine, eodem modo patet in hoc etiam caſu pyramides eſſe inter ſe ut baſes.

PROP. II. SOLIDORUM CURVILINEORUM GENESIM EXPLICARE. Si recta ſublimis motu ſibi ſemper parallelo circuli circumferentiam radat, figura ſolida hoc motu genita *cylindrus* dicitur. At ſi recta per aliquod punctum fixum & ſublime perpetuo tranſiens, altera extremitate radat circuli circumferentiam, ſolidum hoc motu genitum *conus* vocatur. Utriuſque figuræ *baſis* vocatur circulus cujus circumferentiam recta percurrit. Patet cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriuſque circuli centrum in cylindro tranſiens, in cono autem per baſis centrum ipſumque coni verticem *axis* dicitur. Si axis ſit perpendicularis baſi, cylindrus vel conus *rectus* ſolidum genitum appellatur; ſecus autem *obliquus* vocatur. Si autem baſis fuerit quævis alia curva, ſolidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 29, refert cylindrum rectum, figura autem 30 conum rectum repræſentat. Si ſemicirculus AHF (Fig. 31.) circa immotam diametrum AB, in orbem ducatur, donec ad priſtinum ſitum redeat, ſolidum inde genitum *ſphæra* dicitur.

COR. I. Si baſis priſmatis vel pyramidis, aucto numero laterum & imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, priſma abit in ſolidum cylindricum, pyramis

in

in conoidicum. Item prisma cujus latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero in qua basis latera sunt æqualia & distantiæ a vertice æquales, abit in conum rectum.

COR. II. Si sphæra plano quovis secetur, sectio erit circulus qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ, ac deinde erit major vel minor prout planum sectionis magis vel minus recedet a centro sphæræ. Sit enim sectio FIH, ad cujus planum ducatur diameter perpendicularis AB, quæ plano secanti occurrat in E. Si punctum E, congruat cum centro C, patet rectas EI, fore radios sphæræ. Si autem cadat extra, in triangulis CEI, CEF, anguli ad E, erunt recti, latus CE, commune & basis CI = CF; quare quodvis latus CI = EF, ac proinde in utroque casu sectio erit circulus cujus centrum E; illud vero centrum in primo casu coincidet cum centro sphæræ. Patet autem ob angulum rectum in E, radium circuli EF, semper minorem fore radio sphæræ CF, nisi radii illi congruunt abeunte E in C. Evidens etiam est eo minorem fore cordam HF, nempe circuli diametrum, quo minor fuerit distantia CE.

COR. III. Sphæra considerari potest tanquam composita ex pyramidulis æqualibus numero infinitis & infinite parvis, quarum bases sunt in ipsa sphæræ superficie, vertex autem communis est ipsum sphæræ centrum.

SCOL. In capite præcedenti ubi prismata & pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineæ, soli-

ſolidum motu continuo ſuperficiei ; at linea non ex punctis, ſed ex lineolis, ſuperficies ex areolis, non ex lineis, ſolidum ex ſpatiolis ſolidis, non ex ſuperficiebus componitur. Neque genuinam linearum, ſuperficierum & ſolidorum notionem Tyronibus proponunt nonnulli magiſtri qui lineas tanquam e punctis, ſuperficies ex lineis, ſolida ex ſuperficiebus compoſita repræſentant. Itaque dum (in cor. 6. cap. præc.) ex ſectionum æqualitate priſmatum & pyramidum æqualitatem concludimus, id non debet intelligi quaſi priſmata & pyramides ex ſectionibus planis componi velimus ; nam loco ſectionis unius conſiderari poſſent ſectiones duæ infinite proximæ quarum (in cit. coroll.) eadem foret diſtantia ſive altitudo, ut patet ex planorum paralleliſmo. Igitur minima ſolida duabus ſectionibus infinite vicinis comprehenſa forent æqualia in caſu propoſito ; quare communem altitudinem negligere licuit ſolamque ſectionum æqualitatem conſiderare ; id vero facere nunquam licet niſi præter ſectionum æqualitatem, æquales etiam ſint binarum quarumcumque indefinite proximarum diſtantiæ. Porro evidens eſt hanc methodum ad *exhauſtionum* methodum ſæpius explicatam reduci, ac proinde ad ſeveritatem geometricam eſſe omnino compoſitam.

CAPUT II.

De Solidorum menſura.

PROP. I. PRISMATIS CUJUS LATERA RECTILINEA SUNT BASI PERPENDICULARIA, SUPERFICIEM METIRI. Singulæ priſmatis facies in hoc caſu ſunt rectangula ſub ſingulis lateribus baſis ſingulisque priſmatis lateribus

ribus

ribus rectilineis contenta ; ideoque omnium hujusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demptis basibus, est productum ex perimetro basis in unum e lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

COR. I. Cum sex quadratis æqualibus terminetur cubus, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies sumatur. Quia vero parallepipedum sex terminatur superficiebus quarum duæ quælibet oppositæ sunt æquales, inveniantur tres inæquales superficies illarumque summa bis sumatur, habebitur tota parallepipedi superficies.

COR. II. Cum basis cylindri considerari possit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis & infinite parvis compositum, cylindrus haberi poterit tanquam prisma *infinitilaterum* cujus proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem & producto addatur dupla basis sive circuli superficies.

PROP. II. PYRAMIDIS CUJUS LATERA OMNIA SUNT ÆQUALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM ÆQUALIA, SUPERFICIEM INVENIRE. Cum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia æqualia, erit omnium triangulorum summa æqualis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum ; nam triangulum quodlibet æquatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Hæc autem singula perpendicula sunt æqualia ; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, dempta basi.

COR. I. Conus est pyramis *infinitilatera* ac pro-

proinde coni recti superficies æqualis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem sive latus coni, dempta tamen basi.

COR. II. Si pyramis plano basi parallelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquæ pyramidis versus basim abeunt in trapezia æqualia; hæc autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo æqualia quorum bases sunt sectionis & basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum triangulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatæ æquatur dimidio producto ex summa perimetri basis & sectionis in distantiam perpendicularem basium.

COR. III. Si conus rectus plano basi parallelo truncatus ponatur, coni hujus truncati versus basim superficies æqualis est dimidio producto ex peripheriarum summa in coni truncati longitudinem sive latus. Res autem facilius obtinetur, si inveniatur circulus DE, (Fig. 30.) cujus peripheria æqualis sit semisummæ peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D, medium inter B, G, ducaturque recta DE, parallela sectioni BC, hæc erit diameter circuli quæsiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh, erit ob triangulorum DBf, DGh, similitudinem Bf : Df = Dh : Gh, ac proinde ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh: quare eadem est differentia inter diametros BC, DE, quæ est inter diametros DE, GM; illa nempe differentia est dupla rectæ Df, vel Gh, ideoque recta DE, est media proportionalis arithmetica inter BC, GM, seu quod idem est, diameter DE æqualis est semisummæ diametrorum BC, GM. Sed circuli ut pote figuræ similes suas habent

pe-

peripherias diametris proportionales (Scol. cap. 3.) Ergo circumferentia circuli diametro DE, descripti est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC, GM, descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE, circumferentia per latus coni BG.

COR. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQLM (Fig. 32.) circumscriptus sphæræ, habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum sphæræ maximum, superficies segmenti sphæræ HAF, æqualis erit superficiei cylindri QNRK, & area totius sphæræ æqualis areæ totius cylindri, demptis basibus. Etenim concipiatur particula quævis Ff, circuli *genitoris* ita parva ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff, usque ad BA in G; recta FfG, generabit superficiem coni recti, & Ff, superficiem coni truncati, cujus mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum quarum radii sunt EF, ef; ducta autem PO, ita ut peripheria radio PO, descripta æqualis sit semisummæ peripheriarum prædictarum, erit coni truncati superficies ut recta Ff, ducta in circumferentiam cujus radius est OP. Jam vero ob triangula similia rectangula Gef, GEF, GPO, OPC, erit Ee vel Nn : FE = GE : GF = GP : GO = PO : CO, vel EN; ob EN = BL = CO; ideoque Nn × EN = fF × PO, atque ideo cum peripheriæ sint ut radii, erit productum ex Nn, in peripheriam radio EN, descriptam æquale producto ex fF, in peripheriam radio PO, descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF, æquatur toti areæ genitæ a recta QN; & abeunte REN, in MBL, tota

sphæ-

ſphæræ ſuperficies totius cylindri ſuperficiei æqualis eſt, demptis baſibus.

COR. V. Superficies ſphæræ æqualis eſt producto ex circumferentia circuli maximi in axem, ſive diametrum ſphæræ, ac proinde circuli maximi ſuperficie quadruplo major eſt (cor. 1. prop. 2. cap. 2.)

COR. VI. Superficies tota cylindri circumſcripti, incluſis baſibus, eſt ad totam ſphæræ ſuperficiem ut 3 ad 2. Nam ſuperficies ſphæræ, in hoc caſu, baſi cylindri quadruplo major eſt, ſuperficies autem tota cylindri ſua baſi ſexies major eſt.

PROP. III. PRISMATIS SOLIDITATEM METIRI. Polygonum quod priſmatis baſis eſt in ipſam priſmatis altitudinem ducatur, habebitur ſoliditas tota priſmatis, ut patet ex geneſi ipſius ſolidi quod producitur motu parallelo baſis, ac proinde baſis ſive polygoni ſuperficies per altitudinem multiplicari debet.

COR. I. Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam baſis per ipſum quadrati latus. Parallepipedi ſoliditas invenitur, ſi parallelogrammi ſuperficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem ſoliditas cylindri ſi baſis, circuli nempe ſuperficies, in altitudinem cylindri ducatur.

COR. II. Eadem in ſolidorum menſura ratiocinatione inſtituta quam in metiendis ſuperficiebus adhibuimus, evidens eſt cubum eſſe communem ſolidorum menſuram non ſecus ac quadratum eſt menſura ſuperficierum. Itaque pes ſolidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimenſiones quarum ſingulæ pedi ſive 12 pollicibus æquantur, & ita dicendum de alia qualibet menſura.

PROP. IV. PYRAMIDIS SOLIDITATEM INVENIRE. Si ad centrum I cubi GL fiat quadra-

drata pyramis (Fig. 33.) cujus basis sit cubi facies quadrata, evidens est totam cubi soliditatem dividi in sex hujus modi pyramides quadrilateras, æque altas & æqualium basium ac proinde æquales. Igitur pyramis quælibet erit sexta pars cubi; sed cubi mensura æqualis est producto ex basi in altitudinem, ergo illarum pyramidum quælibet erit æqualis producto ex basi in sextam partem altitudinis HP, vel quod idem est in tertiam partem altitudinis IP. Ergo hujusmodi pyramidis soliditas æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu quod idem est, æquatur tertiæ parti cubi ejusdem basis & ejusdem altitudinis.

Generatim pyramis quælibet æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, sive pyramis quælibet est tertia pars prismatis eandem cum ipsa pyramide basim habentis eandemque altitudinem. Etenim sit pyramis quælibet, fingaturque cubus cujus altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Jam si ex centro cubi alia exeat pyramis cujus basis sit facies quadrata cubi, evidens est hanc pyramidem habere eandem cum proposita pyramide altitudinem, ac proinde pyramides illæ sunt inter se ut bases (Cor. 8. Prop. 1. cap. præc.) Sed soliditas pyramidis cubi basi innixæ æqualis est producto ex tertia parte altitudinis in basim, ergo ob altitudinem eandem in utraque pyramide, erit soliditas propositæ pyramidis æqualis producto ex tertia parte altitudinis in basim, ideoque generatim pyramis quælibet est tertia pars prismatis ejusdem basis & altitudinis.

COR. I. Cum cylindrus tanquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tanquam pyramis infinitilatera considerari possint, erit conus

nus tertia pars cylindri eandem habentis basim & eandem altitudinem.

COR. II. Cum sphæra haberi possit tanquam composita ex infinitis pyramidulis quarum vertex communis est in centro sphæræ, bases autem omnes simul sumptæ totam occupant sphæræ superficiem, singulæ illæ pyramides æquales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa æqualis est producto ex omnibus basibus simul sumptis, hoc est, ex superficie sphæræ in tertiam partem radii. Ergo tota sphæræ soliditas habebitur multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumptam.

COR. III. Cum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphæræ æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

PROP. V. SOLIDA DUO SIMILIA, SUNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERUM OMOLOGORUM. Ex solidorum definitione & ex præcedentibus propositionibus evidens est corporis cujuslibet soliditatem esse semper ut productum ex aliqua superficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; superficies autem ex duabus dimensionibus componitur, ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum omologarum; seu ejusdem nominis; sed solida *similia* ea dicuntur, quæ singulas dimensiones omologas habent proportionales; Ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus, ac proinde in ratione triplicata unius cujuslibet dimensionis omologæ.

COR. I. Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphærarum soliditates sunt inter se ut circuli maximi superficies in ra-

radium ducta (Cor. 2. Prop. præc.). Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semidiametrorum (Cor. 1. Prop. 3. Sect. præc.) ergo sphæræ sunt in ratione triplicata semidiametrorum vel diametrorum. Idem facile patet ex sphærarum similitudine; cum enim sphærarum soliditates per circuli maximi superficiem determinentur, sintque circuli figuræ similes, evidens est sphæras esse solida similia ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

COR. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphæris circumscripti (Cor. 3. Prop. præc.). Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, & cylindri sunt in ratione triplicata diametrorum.

COR. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se, erunt ut producta ex basibus & altitudinibus; quare si bases fuerint æquales, erunt solida ut solæ altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erunt ut solæ bases. Si ea solida fuerint æqualia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales; & viceversa, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt æqualia. Tandem si bases fuerint similes, & altitudines lateribus basium omologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum omologorum, vel altitudinum.

SCOL. De solidorum rectorum superficiebus in capite præcedenti sermonem habuimus; verum si solida fuerint obliqua, superficierum mensura sublimiorem Geometriam aliquando postulat. Quod spectat solida superficiebus planis terminata, res est nullius difficultatis; cum enim solidorum illorum facies sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem re-

reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cujusvis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere, traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia prismatis latera ut pote parallela perpendiculariter quoque secabit, atque sectio erit polygonum cujus unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscujusque faciei æquabitur producto ex unoquoque sectionis latere in prismatis latus quodlibet, ob laterum omnium æqualitatem, ac proinde prismatis superficies æquatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet. Jam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis æqualis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut ante; quod idem valet in superficie cylindri qui potest considerari tamquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus, planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum, sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam quæ *ellipsis* vocatur a Geometris, de qua in appendice mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies æqualis producto ex ellipsis circumferentia in latus cylindri. Quod spectat coni obliqui superficiem, patet eam ad sectoris circularis superficiem, ut fit in cono recto, reduci non posse: cum in cono obliquo æquales non sint lineæ omnes ductæ ex vertice coni in basim. Sed hæc pauca monuisse satis sit; hæc enim ad Geometriæ elementa non pertinent.

A P.

APPENDIX

DE LINEIS CURVIS.

I. Lineæ curvæ notionem ita ſimplicem eſſe jam obſervavimus ut explicatione ulla vix clarior effici poſſit; quare, prætermiſſa definitione, de lineis curvis generatim & deinde de parabola & ellipſi pauca exponemus, alia deinde, ubi neceſſitas occurret, demonſtraturi.

In curva qualibet (Fig. 34.) recta AD, lineas parallelas, ut MM, æqualiter dividens, *diameter* curvæ appellatur; *axis* autem vocatur, ſi eaſdem parallelas ad angulos rectos ſecet. Punctum A, in axe *vertex* curvæ dicitur; rectæ autem parallelæ MM, dicuntur *ordinatæ*. Pars diametri vel axis inter punctum A, & ordinatam comprehenſa, dicitur *abſciſſa*. *Æquatio* curvæ appellatur formula Algebraica quæ relationem inter ſemiordinatas & abſciſſas exprimit. Ita demonſtratum eſt in circulo (Fig. 16.) quadratum rectæ EO, æquale eſſe producto ex CO, in OL. Jam diameter CL, dicatur a, ſitque CO $=$ x, & OE $=$ y. Erit OL $= a - x$, ac proinde $y^2 = ax - x^2$, quæ eſt æquatio ad circulum. Ex his evidens eſt ordinatas & abſciſſas curvæ eſſe quantitates indeterminatas; hæ autem determinantur, ſumptis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita ſi in æquatione ad circulum, fiat $x = 0, 2, 3, 4$ &c. invenietur $y = 0, 3, 4, \sqrt{21}$ &c. quare ſi ex ſingulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatæ, & per ſingulas perpendicularium extremitates ducatur curva, hæc ad

quæſitam curvam eo accuratius accedet quo plures erunt hujuſmodi perpendiculares. Ordinatæ non ſolum ad axem, ſed ad quamlibet diametrum referri poſſunt, atque etiam initium abſciſſarum non a ſolo diametri aut axis vertice computari poteſt, ſed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abſciſſæ computari poſſunt vel ab ipſo diametri vertice, vel etiam a centro, atque ita prodeunt diverſæ ejuſdem curvæ æqnationes. Verum quocumque modo curva conſideretur, probe diſtingui debent rectæ ad dextram vel ad ſiniſtram jacentes, & ideo dicuntur *poſitivæ* vel *negativæ*. Has quidem vel illas appellare licet poſitivas vel negativas, at ubi appellatio determinata eſt, hæc ſemper retineri debet; quare ſemiordinatæ & abſciſſæ poſſunt eſſe vel negativæ vel poſitivæ; ratio autem facile patet ex iis quæ de quantitatibus poſitivis & negativis in Algebra obſervavimus.

II. Curva quælibet conſiderari poteſt vel tamquam curva *polygona*, vel tamquam curva *accurata*. Primus conſiderandi modus nihil aliud ſignificat niſi curvam eſſe polygoni inſcripti & circumſcripti *limitem*. Unum autem probe obſervandum eſt in curvarum conſideratione; ſi nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet ne eandem curvam velut accuratam habeat, & viceverſa; atque etiam eadem regula tenenda eſt in duarum curvarum conſideratione, ambæ ſcilicet vel tanquam polygonæ, vel tanquam accuratæ conſiderari debent; inde enim in rebus phyſicis orti ſunt errores aliqui. Rem exemplo demonſtrabimus. In circulo quocumque PQD (Fig. 35.) ducantur cordæ æquales & infiniteſimæ PD, DE, producaturque PD in O, donec DO = PD.

Præ-

Præterea agantur per puncta O, E. recta OQ, & per punctum D, tangens DN, rectæ, OQ, occurens in N; erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE, est isoscele; præterea anguli ODE, mensura est dimidius arcus PDE; anguli autem NDE, mensura est dimidius arcus DE; ergo recta DN, æqualiter dividit angulum ODE, ideoque ob DO = DE, erit OE = 2NE. Jam ponatur corpus aliquod describere arcum circuli infinitesimum PDE, vi aliqua urgente secundum directionem datam quæ in loco D, corpus a linea recta retrahat. Si consideretur circulus tanquam polygonum, corda infinitesima PD, erit *spatiolum* tempore præcedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola æqualis, & in directum posita spatiolum alterum tempore subsequenti æquali descriptum. Quare si ducatur OE, directioni vis in D, agentis parallela, erit hæc lineola OE, vis hujus effectus; vi enim illa corpus ex O, transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tanquam accuratus, tangens DN, erit lineola vi urgente descripta, ideoque NE, vis hujus effectus. Itaque in curva polygona vis effectus repræsentatur per OE, & in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio, alioqui effectus duplo major æstimaretur. Verum quia in virium doctrina ipsarum virium effectus duntaxat comparamus, res perinde se habet, quæcumque adhibeatur cuvarum consideratio, eadem enim prodit effectuum proportio. Hæc autem quæ modo explicavimus, referuntur ad virium centralium doctrinam in Physica generali demonstrandam.

III. Hæc eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest; quod ut intelligatur,

 cur-

curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quælibet plana considerari solet tanquam motu puncti, & perpetua directionis mutatione in plano genita; hic non agimus de curvis quarum puncta singula in eodem non sunt plano, & ideo dicuntur *duplicis curvaturæ*. Itaque evidens est curvam quamlibet ad lineas duas in plano positione datas, ordinatas nempe & abscissas, referendam esse; ad determinandam nempe alicujus curvæ naturam, oportet puncti mobilis vestigia secundum certam eandemque legem ad rectas positione datas referri ita ut punctum illud secundum eandem omnino legem in quolibet infinitesimo mutatæ directionis angulo moveatur; alioqui non eandem sed plures curvas describeret (contra hyp.) Ex hac curvarum consideratione aliqua sane utilissima colliguntur. 1°. Recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim rectam in duobus tribusve punctis contiguis curvam tangere, jam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat .... 2°. Si descriptus intelligatur circulus qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat, ita ut cujuscumque circuli minoris eandem habentis tangentem arcus aliquis utrinque circa punctum contactus sit intra curvam, cujuscumque vero circuli majoris arcus sit extra curvam, hunc circulum dicimus curvæ *osculatorem* in dato puncto, & curvæ ipsius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturæ analogam*. Evidens autem est ex Geometriæ elementis, circuli osculatoris centrum positum esse in concursu duarum perpendicularium ad eandem curvam, ubi puncta duo curvæ ad se invicem in infinitum accedunt; hæc enim est circuli proprietas ut rectæ a centro ad peripheriam ductæ sint ipsi

peri-

peripheriæ perpendiculares; talis autem recta e centro circuli osculatoris ad curvam ducta, vocatur *radius osculator*.... 3°. Quamvis inter tangentem & arcum circuli transire possint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvæ & arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest; nam (ex def.) quicumque minor circulus est intra curvam, quicumque major est extra ipsam. Tota circulorum osculatorum utilitas eo reducitur ut omnium curvarum arcus infinitesimus considerari possit tanquam circularis. Etenim arcus infinitesimus circuli osculatoris & arcus infinitesimus curvæ easdem habent proprietates, cum radius sit ad circulum osculatorem & ad arcum infinitesimum curvæ perpendicularis .... 4°. Hinc definiri potest curvarum in quolibet puncto curvatura; satis enim erit diversas circulorum osculatorum curvaturas inter se comparare; quod quidem facile fieri potest. Etenim evidens est diversorum circulorum curvaturas esse in ratione reciproca radiorum; quod ut intelligatur, fingamus duas rectas æquales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semicircumferentiam tantum; manifestum est semicircumferentiam duplo minus curvam esse quam circumferentiam integram; & duplo major est radius circuli ad quem semicircumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem in arcum duplo vel triplo majorem incurvetur, & ita deinceps. Sed rem generatim demonstrabimus. Sint duo circuli inæquales C, c, quorum radii R, r, ponantur in data ratione, m, ad n. In his circulis capiantur arcus æquales, dicaturque A, arcus in majori circulo, & a, arcus in minori; arcus, A curvatura minor erit curvatura

arcus æqualis, a, in ratione R ad r. Jam vero in circulo majori capiatur arcus A, qui similis sit arcui, a, in minori circulo, erit A : a = C : c = R : r. Quare cum sit a = A, erit etiam A : A = R : r = m : n. Igitur si arcus A similis arcui, a, contineat partes vel gradus, m, arcus, A, continebit partes vel gradus, n, ac proinde curvatura arcus, a, est ad curvaturam arcus, A, ut m ad n. Quare eadem manente arcuum A, a, magnitudine, circulorum c, C, curvaturæ sunt in ratione m ad n, hoc est in ratione reciproca radiorum. Comparari ergo inter se possunt diversæ curvarum curvaturæ atque etiam variæ ejusdem curvæ in diversis punctis curvaturæ; inveniatur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli qui curvam in dato puncto tangens, cum ipsa curva ita congruat ut inter curvam & circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem cum aucto vel diminuto circuli radio, minuatur vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus qui propius quam circulus osculator ad curvam accedat, concludendum est circulum cum ipsa curva in hoc puncto eandem habere curvaturam. Ex his patet finitam esse curvæ alicujus curvaturam, si finitus sit radius osculator; at si radius osculator sit infinitus, curvatura est nulla; tandem si radius osculator = o, curvatura est infinita. Cæterum hæc omnia facilius intelligentur, si revocentur in memoriam quæ de methodo *exhaustionum* & de *primis* ac *ultimis rationibus* jam explicata sunt. Hæc pauca quorum usus in Physicis institutionibus recurret, ex sublimiori doctrina delibasse satis sit, superest ut parabolæ & ellipseos naturam breviter exponamus.

IV.

IV. Si in axe AD (Fig. 34.) sumantur abscissæ quotlibet, & ad singula puncta erigantur semiordinatæ, ea lege ut abscissæ semper sint ut quadrata ordinatarum, curva per singulas ordinatarum extremitates transiens dicitur *parabola*. Jam abscissa dicatur x, & ordinata y, erit sempet x, ut y^2, ac proinde ratio ordinatarum ad abscissas constans & eadem manet; quare si, p, sit quantitas constans, erit $\frac{y^2}{x} = p$, ac proinde $y^2 = px$, quæ est æquatio ad parobolam; nempe in omni parabola quadratum ordinatæ æquale est producto ex abscissa in quantitatem constantem; hæc autem quantitas constans *parameter* dicitur. Si in axe parabolæ abscindatur recta AF, quæ sit quartæ parametri parti æqualis, punctum F, parabolæ *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam crescente abscissa, crescit etiam quadratum ordinatæ, evidens est parabolam non esse curvam in se redeuntem, sed puncta illius singula ab axe perpetuo recedere in infinitum.

COR. II. Data abscissa qualibet ejusque ordinata, inveniri semper poterit parameter, cum sit tertia proportionalis ad ordinatam & abscissam.

COR. III. Si abscissa ponatur $= o$, fit quoque ordinata perpendicularis $MM = O$, ac proinde puncta M, M, coeunt in A, nempe in axis vertice. Quare si per verticem parabolæ ducatur recta ordinatis parallela, hæc erit tangens parabolæ in puncto A.

COR. IV. Ducta intelligatur secans per punctum N, quæ parabolæ occurrat in alio puncto r, ex quo demittatur perpendicularis, rp, ad quam ex puncto N, erigatur perpen-

dicularis Nq, axi parallela, ſit $pT = s$, $Ap = x$, $pt = y$, Nq vel $Pp = f$, erit $qN = \frac{fy}{s}$, ob triangulorum TNP, Nqt, ſimilitudinem, ac proinde $pt = y + \frac{fy}{s}$ & $Ap = x + f$. Jam ſumatur æquatio ad curvam in puncto, t, erit $pt^2 = Ap \times p = y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = px + pf$, deletiſque in hac æquatione terminis æqualibus $y^2 = px$, fiet $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = pf$, & dividendo per f, erit $\frac{2y^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = p$. Jam puncta N, t ad ſe invicem accedant in infinitum mutuoque coeant, ſecans abit in tangentem fitque Nq vel $Pp = o$; quare $f = o$ & $\frac{fy^2}{s^2} = o$, ac proinde æquatio præcedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, & $2y^2 = ps$, ſeu ob, $px = y^2$, fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in parabola recta, PT, quæ *ſubtangens* dicitur, dupla eſt abſciſſæ AP.

COR. V. Recta FN, ducta ex foco parabolæ ad extremitatem ordinatæ cujuslibet, æqualis eſt abſciſſæ AP, & quartæ parti parametri. Nam cum ſit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, vel $= \frac{1}{4}p - x$, prout ordinata jacet ſu-

supra vel infra punctum F, erit $PF^2 = \overline{AP - AF}^2 = x^2 - \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2$. Præterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2$ & $FN = x + \frac{1}{4} p = AP + AF$.

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS, axi parallela, angulus GNS, æqualis est angulo FNT; nam angulus GNS æquatur angulo FTN; præterea triangulum FTN, est isoscele, ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proinde angulus GNS æqualis est angulo FNT. Hæc est tangentis proprietas quæ in Physicis institutionibus erit utilitatis maximæ.

V. Si in axe HI, sumantur abscissæ quotlibet, & ad singula puncta erigantur ordinatæ FN, PM, ea lege ut sit semper FN^2 ad PM^2 in ratione $HF \times FI$ ad $HP \times PI$, curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *Ellipsis* quæ in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint æqualia producto ex segmentis abscissarum. Jam dicatur axis major $HI = a$, ducaturque ex puncto axis medio C, recta BCD, quæ dicitur axis minor, sitque $BC = b$, $HP = x$, $PM = y$, $PI = a - x$, erit $\overline{a - x} \times x : y^2 = a^2 : b^2$ & $y^2 = \frac{ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$, quæ est æquatio ad ellipsim, in qua si ponatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$, æquatio ad circulum. Si abscissæ computentur a centro C, sit $CP = x$, $PM = y$, fiatque $HI = 2a$, erit in hoc casu, $aa - xx : y^2 =$

aa :

$aa : bb$, & $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$. Si ex minoris axis extremitate B, tanquam centro & intervallo BF = CH, tanquam radio, describatur arcus circuli, axi majori occurrens in punctis F, f, puncta illa vocantur ellipseos *foci*; evidens autem est hæc puncta a centro ellipseos æqualiter distare; nam ob BC, axi perpendicularem, triangula CBF, CBf, sunt æqualia.

COR. I. Cum duo ellipseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tertia proportionalis; hæc autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt ellipseos axes, duæ etiam sunt parametri; si nempe axis major sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis majoris dicitur, & contra. Jam si abscissæ ab axis extremitate computentur, sit axis major, a, minor, b, parameter, p, erit $ap = b^2$. Si autem abscissæ computentur a centro, sit 2a axis major & 2b axis minor, erit $2ap = 4b^2$; his autem valoribus in utraque æquatione ad ellipsim substitutis, æquatio ellipseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in casu altero habetur $y^2 = \frac{1}{2} ap - \frac{px^2}{2a}$.

COR. II. Ex ellipseos æquatione evidens est, eam esse curvam in se redeuntem & undique terminatam; crescentibus enim abscissis a centro computatis decrescunt ordinatæ, ac tandem omnino evanescunt, si abscissa semiaxi æqualis sumatur. Manifestum etiam est mutua

mutua axium in centro C, intersectione, ellipsim in quatuor partes similes & æquales dividi, cum eadem sit ad quamlibet partem curvæ æquatio, omnesque proprietates perinde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari Nn, perpetuo decrescente, puncta N, n, coeunt in H, patet tangentem in H, esse axi perpendicularem.

COR. III. Distantia focorum a centro facile invenitur; nam cum sit $BF = HC$, erit $FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quare distantia foci a centro est media proportionalis inter semiaxium summam illorumque differentiam. Præterea ob triangulum BCF rectangulum, erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde $HC - FC : BC = BC : HC + FC$, seu $HF : BC = BC : FI$, nempe semiaxis minor est medius proportionalis inter foci unius distantias ab utroque axis majoris vertice.

COR. IV. Ex ellipseos constructione summa rectarum BF, Bf æqualis est axi majori; at ponamus eandem manere summam in quolibet puncto, sitque $BF + Rf = HI$. Ducatur $HC = a$, $BC = b$, ordinata $RS = y$, $CS = x$, $fC = c$; erit $IS = a - x$, $HS = a + x$, $fS = c - x$, $FS = a + x$, HF, vel $If = a - c$, Hf vel $IF = a + c$. Jam vero cum sit (per hyp.) $FR + fR = 2a$, si differentia inter FR & fR dicatur $2z$, erit $fR = a - z$, & $FR = a + z$. Jam ob triangula FRS, fRS, rectangula, erit $fS^2 + SR^2 = fR^2$, hoc est $cc - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Præterea $FS^2 + IR^2 = FR^2$, hoc est, $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$,

$+ zz$; habentur ergo æquationes duæ quarum prima a secunda subtrahatur, fiet $4cx = 4az$ & $z = \frac{cx}{a}$, quo valore substituto in prima æquatione loco, z, ideoque & $\frac{c^2x^2}{a^2}$, loco z^2, erit $- 2cx + xx + yy = aa - \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, factaque, ut moris est, reductione habebitur $a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$ & $a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 + c^2x^2$, factaque divisione per $a^2 - c^2$, habetur, $\frac{a^2y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2, substituatur $a^2 - c^2$, fiet $\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2$, & tandem $= \frac{a^2b^2 - b^2x^2\ b^2}{a^2}$; quæ est æquatio ad ellipsim ante inventa. Hæc ergo est ellipseos proprietas ut ductis ex utroque foco rectis ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum summa sit axi majori semper æqualis. Hanc eandem proprietatem ex æquatione ellipseos derivare facile est; verum ex proprietate ipsa æquationem elicere placuit ut exemplum esset Tyronibus qua ratione ad æquationem curvæ ex data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens est datis duobus ellipseos axibus, ellipsim facili manu describi posse; sumptis nempe in axe majori duobus punctis tanquam focis, his affixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur acus

acus aliqua ut filum perpetuo tensum maneat, acus motu suo ellipsis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili & axis æqualitate.

COR. V. Si ex puncto R, in ellipseos perimetro ad utrumque focum f, F, ducantur rectæ FR, fR, & in linea producta FR, sumatur RT = Rf, ducaturque Tf ad quam per punctum medium E, & per punctum R, agatur ER, hæc erit tangens in R. Etenim ponamus rectam ER, ellipsi occurrere in alio puncto, r. Ex hoc puncto, r, in recta RE, agantur lineæ, rT, rf, rF. Quoniam (per constr.) TR = Rf, & fE = ET, erit RE, perpendicularis ad fT, ac proinde singula puncta rectæ, ERr, æqualiter distant a punctis f, T, ideoque rf = rT. Sed Fr + rT major est quam FT, ergo etiam Fr + rf major est quam FT, ideoque etiam major quam HI; cum (per constr.) sit FT = HI; quare punctum, r, non pertinet ad ellipsim; ergo recta RE, tangit ellipsim in unico puncto R. Hæc est utilissima in Physicis institutionibus tangentis proprietas, quam quidem ex ellipseos æquatione, non secus ac in parabola fecimus, eruere licebat; sed diversas veritatis inveniendæ vias Tyronibus demonstrare maxime convenit.

SCOL. Parabolæ & ellipseos æquationem consideravimus, ordinatis ad axem relatis. At ex demonstratis facile erit curvarum illarum æquationes invenire, si ordinatæ ad diametrum quamlibet referantur; eadem est in singulis casibus curvarum illarum natura; primarias duntaxat proprietates demonstrasse satis sit, alias enim, ubi necessitas postulaverit, in physi-

Physicis institutionibus explicabimus. Præterea etiam ad exercendum acuendumque ingenium aliquid Tyronibus relinquere opportunissimum est, idque postulat recta docendi ratio. *Sectiones conicæ* appellantur parabola & Ellipsis quibus, etiam annumerari debet *hyberbola* de qua nullum verbum fecimus, ut pote nullius fere usus in nostris Physicis institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit si tres illas curvas in coni sectione consideremus.

Sit ABC conus (Fig. 36) circulari basi insistens, & secetur plano quolibet IEM. Ponatur sectio alia KILM parallela basi & occurrens priori sectioni in HI, intelligaturque sectio tertia priores duas in EH & KL, perpendiculariter bisecans atque etiam conum in triangulo ABC. Jam producto EH, donec ipsi AK occurrat in D, ductisque EF ac DG, rectæ KL, parallelis & occurrentibus sectioni triangulari in F & G, dicatur EF $= a$, DG $= b$, ED $= c$, EH $= x$, & HI $= y$, ob triangulorum EHL, EDG similitudinem, erit ED (c) : DG $(b) =$ EH (x) : HL $= \frac{bx}{c}$. Simili modo ob triangulorum DEF, DHK similitudinem, erit DE (c) : EF $(a) =$ DH $(c-x)$ (Fig. 36) vel $c+x$ (Fig. 37) : HK $= \frac{ac \mp ax}{c}$: tandem cum sectio KIL parallela basi sit circulus, ut patet ex genesi ipsius coni, erit HK×KL $=$ HI², hoc est $\frac{abx}{c} \mp \frac{abxx}{cc} = yy$; at si ponatur se-

ctio-

ctionem ita se habere, ut ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela, tunc erit HK $=$ EF $=$ a, ideoque HK×HL $=$ HI², hoc est $\frac{abx}{c} = y^2$. Si æquationes illas seorsim consideremus, evidens est figuram 36. ellipsim referre, cum quadrata ordinatarum semper sint ut productum ex segmentis abscissarum. Figura 37. refert curvam quæ *hyperbola* dicitur; in hac autem curva non secus ac in ellipsi, quadrata ordinatarum sunt ut productum ex segmentis abscissarum; sed probe notandum est discrimen. Sectio conica est ellipsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculare, duobus coni lateribus occurrat; at sectio conica fit hyperbola, si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera; sed in hoc casu sectio ita se habet ut planum secans productum, cono ad verticem opposito occurrat in D, alteraque sectione generet hyperbolam oppositam. Recta DE, dicitur *axis transversus*, punctum hujus axis medium vocatur *centrum* hyperbolarum, per quod si ducatur hinc & inde recta perpendicularis, ea proportione ut productum ex segmentis abscissarum sit ad quadratum ordinatæ, sicut est quadratum axis transversi ad quartum terminum proportionalem, habebitur quadratum axis qui *conjugatus* vel *secundus* axis appellatur. Igitur in æquatione ad hyperbolam punctum D, sumitur in hyperbola opposita, & productum ex segmentis abscissarum est, DH×EH (Fig. 37).

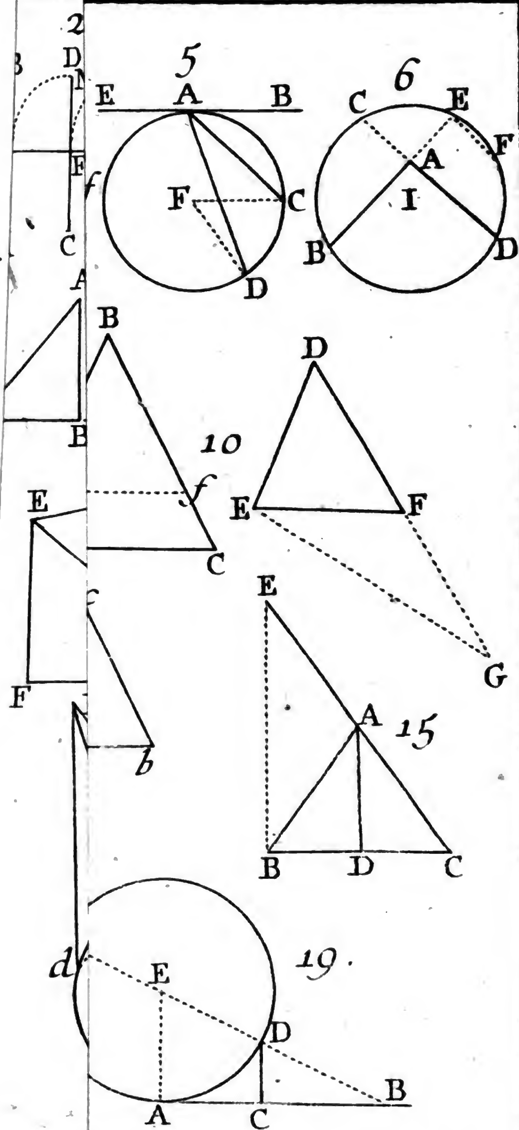
Tertiam æquationem $\frac{abx}{c} = y^2$ esse ad parabo-

lam

lam cujus parameter $\frac{ab}{c}$ ex antea demonstratis evidens est. In hac autem curva planum secans est alterutri lateri coni parallelum. Itaque cum ex coni sectione natæ sint tres illæ curvæ, patet cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen. Sed hæc breviter dicta sint, ut Algebræ usus in Geometria Tyronibus ostendatur.

FINIS.




2
D
F
f
C
A
B
E
F
b
d
5
E A B
F C
D
6
C E
F
A
I
B D
B
10
f
C
D
E F
G
E
A 15
B D C
19
E
D
A C B





